

Rachunek ppb i statystyka

Lista zadań nr 10.

1. Y_1 i Y_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach: $Y_1 \sim N(1, 3)$ oraz $Y_2 \sim N(2, 5)$. Niech $W_1 = Y_1 + 2Y_2$ oraz $W_2 = 4Y_1 - Y_2$. Znaleźć rozkład łączny zmiennej $W = (W_1, W_2)$.

Y_1 i Y_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach: $Y_1 \sim N(0, 1)$ oraz $Y_2 \sim N(3, 4)$.

2. Jaki jest rozkład zmiennej Y_1^2 ?
3. Niech $y = [Y_1 (Y_2 - 3)/2]^T$. Obliczyć $y^T y$. Jaki to jest rozkład?

$y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ ma rozkład łączny $N(\mu, V)$, gdzie $\mu = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ oraz $V = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$.

4. Znaleźć rozkład zmiennej $(y - \mu)^T V^{-1} (y - \mu)$.

Niezależne zmienne losowe $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ mają ten sam rozkład $N(\mu, \sigma^2)$.

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2.$$

5. Jaki jest rozkład $\bar{Y}$?
6. Wykazać że $S^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n (Y_i - \mu)^2 - n(\bar{Y} - \mu)^2 \right]$.
7. Udowodnić, że zmienne $\bar{Y}$ oraz S^2 są niezależne.

Wsk.: Pomnożyć równość z poprzedniego zadania przez $\frac{(n-1)}{\sigma^2}$, skorzystać też z własności rozkładu *chi-kwadrat*.

8. Jaki jest rozkład zmiennej $\frac{\bar{Y} - \mu}{S/\sqrt{n}}$?

Witold Karczewski