Kolokwium II

---

67. X ma rozkl. $P(X=n)=2^{-n}$, znaj. rozkl. $Y=\sin\frac{1}{2}\pi x$

rozw: $0=\frac{x}{2}\pi=k\pi,\Rightarrow x=2k$; $1=\frac{x}{2}\pi=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Rightarrow x=1+4k$; $-1=\frac{x}{2}\pi=\frac{3}{2}\pi+2k\pi\Rightarrow x=3+4x$ zatem

$P(Y=0)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X=2k)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-2k}=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{4})^k=\frac{1}{3}$

$P(Y=1)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X=1+4k)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-(1+4k)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}(\frac{1}{16})^k=\frac{1}{30}$

$P(Y=-1)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X=3+4k)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-(3+4k)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{8}(\frac{1}{16})^k=\frac{1}{120}$

---

68. X rozk. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{1}{2}x^2\}$. Znaj. $g(y)$ dla $Y=3X+1$

rozw: $G(t)=P(Y<t)=P(3X+1<t)=P(X<\frac{t-1}{3}=F(\frac{t-1}{3})$; $g(t)=(F(\frac{t-1}{3}))'=f(\frac{t-1}{3})\cdot(\frac{t-1}{3})'=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{1}{2}(\frac{t-1}{3})^2\}$

---

69. X rozk. $f(x)=3\exp\{-3x\}x>0$, znaj. $g(y)$ dla $Y=X^2$

rozw: $G(t)=P(Y<t)=P(X<\sqrt{t})=F(\sqrt{t})$; $g(t)=(F(\sqrt{t}))'\overset{Z68}{=}\frac{1}{2\sqrt{t}}$

---

70. X rozk. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{1}{2}x^2\}$, znaj. $g(y)$ dla $Y=X^2$

rozw: $G(t)=P(Y<t)=P(-\sqrt{t}<t<\sqrt{t})=F(\sqrt{t})-F(-\sqrt{t})$; $g(y)=(F(\sqrt{y})-F(-\sqrt{y}))'=\frac{1}{2\sqrt{y}}f(\sqrt{y})+\frac{1}{2\sqrt{y}}f(-\sqrt{y})=\frac{1}{\sqrt{y}}f(\sqrt{y})=1/(\sqrt{2\pi y})\exp\{-\frac{y}{2}\}$

---

71. $|E(XY)|\leqslant\sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$

rozw: $Z=(Y-aY)^2\Rightarrow E(Z)\geqslant 0$; $E(Z)=E((X-aY)^2)=E(X^2)-2aE(XY)+a^2E(Y^2)\geqslant 0$; równ. kwadrat. $\triangle=4E^2(XY)-4E(X^2)E(Y^2)\leqslant 0\Rightarrow|E(XY)|\leqslant\sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$

---

72. wyk. $D^2(X+a)=D^2(X)$; **rozw:** $D^2(X+a)=E[((X+a)-E(a+X))^2]=E[(X+a-a-EX)^2]=E[(X-EX)^2]=D^2(X)$

---

73. wyk. $D^2(aX)=a^2D^2(X)$; **rozw:** $D^2(aX)=E[(aX-E(aX))^2]=E[(a(X-EX))^2]=E[a^2(X-EX)]=a^2E[(X-EX)^2]=a^2D^2(X)$

---

74. $Y=\frac{X-EX}{\sqrt{D^2(X)}}$, obl. $E(Y),D^2(Y)$; **rozw:** $EY=E(\frac{X-EX}{\sqrt{D^2(X)}})=\frac{E(X-EX)}{\sqrt{D^2(X)}}\frac{EX-EX}{\sqrt{D^2(X)}}=0$; $D^2(Y)=D^2(\frac{X-EX}{\sqrt{D^2(X)}})=\frac{D^2(X-EX)}{D^2(X)}=\frac{D^2(X)}{D^2(X)}=1$

---

81. Czy można tak wyznaczyć C, żeby $f(x,y)=Cxy+x+y$ dla $x\in[0,2]$ $y\in[0,1]$ była gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej?

$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}Cxy+x+y\ dydx=1$; $\int_0^2(\int_0^1(Cxy+x+y)dy)dx=\int_0^2\left(\int_0^1 Cxy\ dy+\int_0^1 x\ dy+\int_0^1 y\ dy\right)dx=\int_0^2(\frac{Cxy^2}{2}|_0^1+xy|_0^1+\frac{y^2}{2}|_0^1)dx=\int_0^2(\frac{Cx}{2}+x+\frac{1}{2})dx=\int_0^2(1+\frac{C}{2})xdx+\int_0^2\frac{1}{2}dx=(1+\frac{C}{2})\frac{x2}{2}|_0^2+\frac{1}{2}x|_0^2=3+C$; $3+C=1\Rightarrow C=-2$;

Nawet dla największych wartosci x,y $f(x,y)<0$ czyli f nie jest gestoscią

---

82. Dana jest funkcja $f(x,y)=Cxy+x$ dla $x\in[0,2]$ $y\in[0,1]$.

$a)$Wyznaczyć stała C tak, aby dana funkcja była gęstością zmiennej losowej (X,Y)

$\int_0^2(\int_0^1(Cxy+x)dy)dx=1$; $\int_0^2(\int_0^1(Cxy+x)dy)dx=\int_0^2(\int_0^1 Cxydy+\int_0^1 xdy)dx=\int_0^2(\frac{Cxy^2}{2}|_0^1+xy|_0^1)dx=\int_0^2(\frac{Cx}{2}+x)dx=\int_0^2(\frac{C}{2}+1)xdx=(\frac{C}{2}+1)\frac{x^2}{2}|_0^2=C+2$; $C+2=1\Rightarrow C=-1$

$b)$Sprawdzić czy zmienne X,Y sa niezależne

$f_1(x)=\int_0^1(-xy+x)dy$ dla $x\in[0,2]$ i $f_1(x)=0$ w p.p.; $\int_0^1(-xy+x)dy=\int_0^1 xdy-\int_0^1 xydy=xy|_0^1-\frac{xy^2}{2}|_0^1=x-\frac{x}{2}=\frac{x}{2}$; $f_2(y)=\int_0^2(-xy+x)dx$ dla $y\in[0,1]$ i $f_1(y)=0$ w p.p.; $\int_0^2(-xy+x)dx=\int_0^2(-y+1)xdx=\frac{(1-y)x^2}{2}|_0^2=2-2y$; $f_1(x)f_2(y)=\frac{x}{2}(2-2y)=-xy+x=f(x,y)\Rightarrow$ zmienne X,Y sa niezależne.

$c)$Obliczyć ppb $P(1\leqslant X\leqslant 3,0\leqslant Y\leqslant 0,5)$

$P(1\leqslant X\leqslant 3,0\leqslant Y\leqslant 0,5)=\int_1^2(\int_0^{0,5}(-xy+x)dy)dx=\int_1^2(-x\int_0^{0,5}y+x\int_0^{0,5}1dy)dx=\int_1^3(\frac{-0,25x}{2}+0,5x)dx=0,375\int_1^2 xdx=0,375\frac{x^2}{2}|_1^2=0,5625$

---

83. X,Y sa niezal o rozkl. wykl. z param. 1. Znaleźć gęst zm. los. $Z=X+Y$

$f(x,y)=e^{-x}e^{-y}=e^{-(x+y)}$; $\left|\begin{array}{l}Z=X+Y\\U=X\end{array}\Rightarrow\begin{array}{l}Y=Z-U\\X=U\end{array}\right|$; $|J|=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}=1$; $g(u,z)=f(x(u,z),y(u,z))|J|=e^{-(u+z-n)}=e^{-z}$

---

84. Dana jest funkcja $f(x,y)=C(x+y)e^{-(x+y)}$ dla $x,y>0$.

$a)$Wyznaczyc stala C tak, aby dana funkcja byla gestoscia zmiennej losowej (X,Y)

$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}C(x+y)e^{-(x+y)}dydx=C\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(xe^{-x}e^{-y}+ye^{-x}e^{-y})dydx=C\int_0^{\infty}\left(xe^{-x}\int_0^{\infty}e^{-y}dy+e^{-x}\int_0^{\infty}ye^{-y}dy\right)dx=C\int_0^{\infty}(xe^{-x}+e^{-x})dx=2C$; $2C=1\Rightarrow C=\frac{1}{2}$; gdzie $\int_0^{\infty}e-ydy=1$ i $\int_0^{\infty}ye-ydy=1$

$b)$Sprawdzic czy zmienne losowe sa niezalezne.

$f_1(x)=\int_0^{\infty}f(x,y)dy=\int_0^{\infty}\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}dy=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(xe^{-x}e^{-y}+ye^{-x}e^{-y})dy=\frac{1}{2}xe^{-x}\int_0^{\infty}e^{-y}dy+\frac{1}{2}xe^{-x}\int_0^{\infty}ye^{-y}dy=\frac{1}{2}e^{-x}(x+1)$; $f_2(y)=\frac{1}{2}e^{-y}(y+1)$; $f_1(x)f_2(y)\neq f(x,y)\Rightarrow X,Y$- zmienne niezalezne.

$c)$Obliczyc m_{10},m_{01},m_{11}

$m_{10}=E(X^1Y^0)=\int_0^{\infty}xf_1(x)dx=\int_0^{\infty}\frac{1}{2}xe^{-x}(x+1)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(x^2+x)e^{-x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}x^2e^{-x}dx+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}xe^{-x}dx=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$; $m_{10}=m_{01}$ - z racji symetrii zmiennych; $m_{11}=E(XY)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}xyf(x,y)dydx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}xy(x+y)e^{-x}e^{-y}dydx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(x^2ye^{-x}e^{-y}+xy^2e^{-x}e^{-y})dydx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(x^2e^{-x}\int_0^{\infty}ye^{-y}dy+xe^{-x}\int_0^{\infty}y^2e^{-y}dy\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}x^2e^{-x}dx+\int_0^{\infty}xe^{-x}dx=2$

$d)$Obliczyc wspolczynnik korelacji

$m_{20}=E(X^2)=\int_0^{\infty}xf_1(x)dx=\frac{1}{2}(\int_0^{\infty}x^3e^{-x}dx+\int_0^{\infty}x^2e^{-x}dx)=4=m_{02}$; $D^2(X)=D^2(Y)=m_{20}-m_{10}^2=4-(\frac{3}{2})^2=\frac{7}{4}$

$\mathbf{p}=\frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20}\mu_{02}}}=\frac{E((X-m_{10})(Y-m_{10}))}{\sqrt{D^2(X)D^2(Y)}}=\frac{4}{7}(E(XY)-(EX)(EY))=\frac{4}{7}(2-\frac{9}{4})=-\frac{1}{7}$

---

85. Dana jest funkcja $f(x,y)=Cexp\{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)\}$ dla $x,y\in(-\infty,\infty)$.

$a)$Wyznaczyc stala C

$C\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}exp\{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)\}dxdy=C\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}exp\{-\frac{1}{2}((x+y)^2+4y^2)\}dxdy=C\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2y^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(x+y)^2}dxdy=\left|\begin{array}{l}u=x+y\\du=dx\end{array}\right|=C\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2y^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}u^2}dudy=C\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2y^2}\sqrt{2\pi}dy=\sqrt{2\pi}C\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2y^2}dy=\left|\begin{array}{l}u=\sqrt{2}y\\du=\sqrt{2}dy\end{array}\right|=\sqrt{2\pi}C\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du=(\sqrt{\pi})^2C=C\pi\wedge C\pi=1\Rightarrow C=\frac{1}{\pi}$

$b)$Wyznaczyc rozklady brzegowe

$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}exp\{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)\}dy=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}exp\{-\frac{1}{2}((\sqrt{5}y+\frac{x}{\sqrt{5}})^2+\frac{4x^2}{5})\}dy=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{2x^2}{5}}\int_{-\infty}^{\infty}exp\{-\frac{1}{2}((\sqrt{5}y+\frac{x}{\sqrt{5}})^2\}dy=\left|\begin{array}{l}u=\sqrt{5}y+\frac{1}{\sqrt{5}}x\\du=\sqrt{5}dy\end{array}\right|=\frac{1}{\sqrt{5}\pi}e^{-\frac{2x^2}{5}}\sqrt{2\pi}=\sqrt{\frac{2\pi}{5}}e^{-\frac{2x^2}{5}}$; $f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}exp\{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)\}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}exp\{-\frac{1}{2}((x+y)^2+4y^2)\}dx=\frac{1}{\pi}e^{-2y^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(x+y)^2}dx=\sqrt{2\pi}e^{-2y^2}$

$c)$Wyznaczyc gestosc ppb zmiennej U,V, gdzie $U=X+Y,V=X-Y$

$U=X+Y,V=X-Y\Rightarrow U+V=2X\wedge 2Y=U-Y\wedge Y=\frac{U-V}{2}\wedge X=\frac{U+V}{2}$; $|J|=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}$; $f(U,V)=\frac{1}{2\pi}exp\{-\frac{1}{2}\left(\frac{(u+v)^2}{4}+2\frac{u+v}{2}\frac{u-v}{2}+5\frac{(u+v)^2}{2}\right)\}=\frac{1}{2\pi}exp\{-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2+2uv+v^2}{4}+\frac{2u^2-2v^2}{4}+\frac{5u^2-10uv+5v^2}{4}\right)\}=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(2u^2-2uv+v^2)}$

---

86. Losujemy jedna karte z talii 24 kart. Zmienna losowa X przyjmuje wartosci: 0- w przypadku wylosowania trefla, 1-kara, 2-kiera ,3-pika. Zmienna Y przyjmuje wartosci: $5,4,3$ w przypadkach wylosowania asa, krola, damy i 0 w p.p.

$a)$Podac rozklad zmiennej (X,Y) oraz rozklady brzegowe

Rozklad: $P[X=i,Y=j]=\frac{1}{24}$ dla $j\neq 0$ i $P[X=i,Y=j]=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$ dla $j=0$;

Rozklady brzegowe: $P[X=i]=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$; $P[Y=j]=\frac{4}{24}$ dla $j=3,4,5$ i $P[Y=j]=\frac{12}{24}$ dla $j=0$

$b)$Sprawdzic czy zmienne X,Y sa niezalezne

$P[X=i]P[Y=j]=\frac{1}{4}\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$ dla $j\neq 0$ i $P[X=i]P[Y=0]=\frac{1}{4}\frac{12}{24}=\frac{1}{8}$ dla $j=0$, iloczyn rozkladow brzegowych X,Y jest rowny rozkladowi (X,Y) czyli zmienne sa niezalezne.

$c)$Obliczyc momenty zwykle i centralne do rzedu drugiego wlacznie

$EX=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$; $EY=\frac{1}{6}(3+4+5)=2$; $E(X^2)=\frac{0+1+4+9}{4}=\frac{7}{2}$; $E(Y^2)=\frac{1}{6}(9+16+25)=\frac{50}{6}=\frac{25}{3}$; $E(XY)=\sum_{x=0}^{3}\sum_{y=3}^{5}xy\frac{1}{24}=\frac{1}{24}(\sum_{x=0}^{3}\sum_{y=3}^{5}xy)=\frac{1}{24}(\sum_{x=0}^{3}x)(\sum_{y=3}^{5}y)=\frac{1}{24}\ 6\ 12=3$; $\mu_{20}=D^2X=E(X^2)-EX^2=\frac{5}{4}$; $\mu_{02}=D^2Y=E(y^2)-EY^2=\frac{13}{3}$; $\mu_{11}=E[(X-EX)(Y-EY)]=E(XY)-E(X)E(Y)=0$

$d)$Podac rozklad zmiennej $Z=X+Y$

$P[Z=0]=P[X=0,Y=0]=\frac{1}{8}$; $P[Z=1]=P[X=1,Y=0]=\frac{1}{8}$; $P[Z=2]=P[X=2,Y=0]=\frac{1}{8}$; $P[Z=3]=P[X=3,Y=0]+P[X=0,Y=3]=\frac{1}{6}$; $P[Z=4]=P[X=1,Y=3]+P[X=0,Y=4]=\frac{1}{12}$; $P[Z=5]=P[X=0,Y=5]+P[X=1,Y=4]+P[X=2,Y=3]=\frac{1}{8}$; $P[Z=6]=P[X=1,Y=5]+P[X=2,Y=4]+P[X=3,Y=3]=\frac{1}{8}$; $P[Z=3]=P[X=2,Y=5]+P[X=3,Y=4]=\frac{1}{12}$; $P[Z=8]=P[X=3,Y=5]=\frac{1}{24}$;

---

87. Zm. dwuwymi. roz o gest. $f(x,y)=x$, $x\in[0,1],y\in[0,\frac{1}{x}]$. Znajdź $F(x,y),f_1(x),f_2(y)$

Niech $A=\{(x,y):y<0\vee(y\geqslant 0\Rightarrow x<0)\}$; $B=\{(x,y):x\in[0,1]\wedge y\in[0,\frac{1}{x}]\}$; $C=\{(x,y):y>\frac{1}{x}\wedge x\in(0,1]\}$; $D=\{(x,y):x>1\wedge y\in[0,1]\}$; $E=\{(x,y):x,y>1\}$

$A:F_A(s,t)=0$; $B:F_B(s,t)=\int_0^s\int_0^t xdydx=\int_0^s x(y|_0^t)dx=\int_0^s xtdx=\frac{tx^2}{2}|_0^s=\frac{ts^2}{2}$; $c_1=F_{c1}(\frac{1}{t},t)=\int_0^{\frac{1}{t}}\int_0^t xdydx=\int_0^{\frac{1}{t}}xtdx=\frac{tx^2}{2}|_0^{\frac{1}{t}}=\frac{1}{2t}$ i $c_2=F_{c2}(s,t)=\int_{\frac{1}{t}}^s\int_0^{\frac{1}{x}}xdydx=)=\int_{\frac{1}{t}}^s x(y|_0^{\frac{1}{x}})dx=x|_{\frac{1}{t}}^s=s-\frac{1}{t}$; $C:F_C(s,t)=c_1+c_2=s-\frac{1}{2t}$; $D:F_D(s,t)=F_B(1,t)=\frac{t}{2}$; $E=F_E(s,t)=F_C(1,t)=1-\frac{1}{2t}$

$f_1(x)=0$ dla $x\notin[0,1]$ i $f_1(x)=\int_0^{\frac{1}{x}}f(x,y)dy$ dla $x\in[0,1]$; $\int_0^{\frac{1}{x}}f(x,y)dy=\int_0^{\frac{1}{x}}xdy=x\frac{1}{x}=1$; $f_2(y)=0$ dla $y\notin[0,\infty)$; $f_2(y)=\int_0^1 f(x,y)dx$ dla $y\in[0,1]$; i $f_2(y)=\int_0^{\frac{1}{y}}f(x,y)dx$ dla $y\in[1,\infty)$; $\int_0^1 f(x,y)dx=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$; $\int_0^{\frac{1}{y}}xdx=\frac{1}{2y^2}$

---

88. Gęstość $f(x,y)=\frac{4}{3x^3y^2}$ dla $x\geqslant 1$, $\frac{1}{x}\leqslant y\leqslant x^2$

Podobnie jak z87 (trzeba rozróżnić dwa obszary znajdujące się w zakreślonym polu, łącznie mamy 5 obszarów).

---

89 $m_i=E(X^i),\mu_i=E[(X-EX)^i)]$

$\mu_1=E[(X-EX))]=\sum(x_i-EX)p_i=\sum x_ip_i-EX\sum p_i=0$

$\mu_2=E[(X-EX)^2]=\sum(x_i-EX)^2p_i=\sum x_i^2p_i-2EX\sum x_ip_i+(EX)^2\sum p_i=EX^2-(EX)^2+(EX)^2=m_2-m_1$

$\mu_3=E[(X-EX)^3]=\sum(x_i^3-3x_i^2EX+3x_i(EX)^2-(EX)^3)p_i=\sum x_i^3p_i-3EX\sum x_i^2p_i+3(EX)^2\sum x_ip_i+(EX)^3\sum p_i=EX^3-3EXEX^2+3(EX)^3+(EX)^3=m_3-3m_1m_2+4m_1^3$

---

91 Mamy tablice rozkł. $N(0,1)$. Wiemy, że $X\sim N(2,4)$ Chcemy obliczyć $P(|X|<6)$ Niech $Y\sim N(0,1)$ wtedy $X=2Y+2$ i $P(|X|<6)=P(|2Y+2|<6)=P(2Y+2<6)-P(2Y+2<-6)=P(Y<2)-P(Y<-4)=\Phi(2)-P(Y<-4)=\Phi(2)-(1-\Phi(4))$

---

92 Gęstość $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\{-\frac{(\ln x-m)^2}{2\sigma^2}\}$, dla $x>0$. Mamy wykazać $m_i=\exp\{lm+\frac{1}{2}l^2\sigma^2\}$.

$m_i=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\int_0^{\infty}x^{i-1}\exp\{-\frac{(\ln x-m)^2}{2\sigma^2}\}dx=\{u=\frac{lnx-m}{\sigma},x=e^{\sigma u+m},\sigma du=\frac{1}{x}dx\}=$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\sigma\int_0^{\infty}\exp\{l(\sigma u+m)\}\exp\{-\frac{u^2}{2}\}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\exp\{-\frac{1}{2}u^2+l\sigma u+lm\}du=$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{lm\}\int_0^{\infty}\exp\{-\frac{1}{2}[u^2+2l\sigma u+l^2\sigma^2-l^2\sigma^2]\}du=$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{lm\}\exp\{\frac{1}{2}l^2\sigma^2\}\int_0^{\infty}\exp\{-\frac{1}{2}(u+l\sigma)^2)\}du=\{z=u+l\sigma,dz=du\}=\exp\{lm+\frac{1}{2}l^2\sigma^2\}$

---

93 Gęstość $f(x,y)=e^{-y}$, $0\leqslant x<\infty$, $x\leqslant y<\infty$; Zaznaczamy w ukł. wsp. przedział gęstości dla danych x,y (tutaj prosta $y=x$). Liczymy osobno dystrybuante dla następujących obszarów:

A (I ćw, obszar nad prostą $y=x$): $F(x,y)=\int_0^x\int_x^y e^{-y}dydx=-\int_0^x e^{-y}dx+$

$\int_0^x e^{-x}dx = 1 - e^{-y}x - e^{-x}$

B (I ćw, obszar pod prostą $y = x$): $F(x,y) = F(y,y) = 1 - e^{-y}y - e^{-y}$
C (II,III,IV ćw, pozostały obszar): $F(x,y) = 0$

Gęstości brzegowe: $f_1(x) = \int_0^\infty e^{-y}dy = e_{-x}$, $f_2(x) = \int_0^y e^{-y}dx = ye^{-y}$

---

94 Gęstość $f(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{xy}}$, $0 \geqslant x \geqslant y \geqslant 1$

Podobnie jak 93 (tutaj mamy 5 obszarów).

---

95 Gęstość $f(x,y) = 24x^2y(1-x)$, dla $0 \leqslant x, y \leqslant 1$. Sprawdzić czy X i Y są niezależne

$f_1(x) = \int_0^1 24x^2y(1-x)dy = 12x^2(1-x)$, $f_2(y) = \int_0^1 24x^2y(1-x)dx = 2y$

$f_1(x)f_2(y) = 12x^2(1-x)2y = 24x^2y(1-x) = f(x,y)$ zatem zmienne X,Y są niezależne

---

96=109. $X \sim \Gamma(b, p_1)$, $Y \sim \Gamma(b, p_2)$. pokaz $X + Y = Z \sim \Gamma(b, p_1 + p_2)$

rozw: $f(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-bx}$, $\varphi_X(t) = \int f(x)e^{tx}dx = \frac{b^p}{\Gamma(p)}\int_0^\infty x^{p-1}e^{-bx}e^{tx}dx =$
$|z = (b-t)x, dz = (b-t)| = \frac{b^p}{\Gamma(p)}\int_0^\infty \frac{z^{p-1}}{(b-t)^{p-1}}e^{-z}\frac{dz}{b-t} = \frac{b^p}{\Gamma(p)}(b-t)^{-p}\Gamma(p) =$
$(1-\frac{t}{b})^{-p}$

$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t) = (1-\frac{t}{b})^{p_1}\cdot(1-\frac{t}{b})^{p_2} = (1-\frac{t}{b})^{p_1+p_2}$, więc $Z \sim \Gamma(b, p_1+p_2)$

---

97. Prwszy,drgi moment, wariancja rzkldu Poissona: $\phi(t) = exp\{\lambda(e^t-1)\}; \phi'(t) = \phi(t)\lambda e^t; \phi''(t) = \phi'(t)\lambda e^t + \phi(t)\lambda e^t = \lambda e^t[\phi'(t) + \phi(t)]; m_1 = \phi'(0) = \lambda; m_2 = \phi''(0) = \lambda^2 + \lambda; D^2(x) = m_2 - m_1^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda; \phi(t) = E(e^{tx})$

---

98. wart.oczek. i wariancja rozkł. normalnego($\phi(t) = exp\{imt - \frac{1}{2}\sigma^2t^2\}$): $\phi(t) = exp\{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2\}; \phi'(t) = \phi(t)(\mu + \sigma^2 t); \phi''(t) = \phi'(t)(\mu + \sigma^2 t) + \phi(t)\sigma^2; \phi'(0) = \mu; \phi''(0) = \mu^2 + \sigma^2; \mu_2 = m_2 - m_1^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$

---

99. X_k - niezal. mają rzkld Poissona z param. λ_k,pokazać, że $Y = \sum X_k$ ma rozkł.Poissona z param. $\lambda = \sum \lambda_k$; $\phi_Y(t) = E[e^{tY}] = E[e^{t(\sum X_k)}] = E(\prod_k e^{tX_k}) = \prod_k E(e^{tX_k}) = \prod_k \phi_k(t) = \prod_k exp\{\lambda_k(e^t-1)\} = exp\{\sum_k \lambda_k(e^t-1)\} = exp\{(\sum_k \lambda_k)(e^t-1)\}$;

---

100. Niezal. X_k mają rozkł.norm. $N(\mu_k, \sigma_k^2)$. Pokazać, że $Y = \sum X_k$ ma rozkł.norm. $N(\sum \mu_k, \sum \sigma_k^2)$: $\phi_{X_k}(t) = exp\{\mu_k t + \frac{1}{2}t^2\sigma_k^2\}; \phi_Y(t) = E(e^{tY}) = E[e^{t(\sum X_k)}] = E(\prod_k e^{tX_k}) = \prod_k E(e^{tX_k}) = \prod_k \phi_{X_k}(t) = \prod_k exp\{\mu_k t + \frac{1}{2}t^2\sigma_k^2\} = exp\{\sum_k(\mu_k t + \frac{1}{2}t^2\sigma_k^2)\} = exp\{\sum_k \mu_k t + \sum_k \frac{1}{2}t^2\sigma_k^2\} = exp\{(\sum_k \mu_k)t + \frac{1}{2}t^2(\sum_k \sigma_k^2)\}; Y \sim N(\sum \mu_k, \sum \sigma_k^2)$

---

101. Niezal X_k mają rzkld Bernoulliego z prmtr (n_k, p). Pokazać,że $Y = \sum X_k$ ma rzkld z prmtr $(\sum n_k, p)$: $X_k \sim B(n_k, p)$; $\phi_{X_k}(t) = (q + pe^t)^{n_k}; (q = 1-p); \phi_Y(t) = E(e^{tY}) = E[e^{t(\sum X_k)}] = E(\prod_k e^{tX_k}) = \prod_k E(e^{tX_k}) = \prod_k \phi_{X_k}(t) = \prod_k (q + pe^t)^{n_k} = (q + pe^t)^{\sum n_k}; Y \sim B(\sum n_k, p)$;

---

102. Niezal.X_k mają rzkld nrmlny $N(0, \sigma^2)$. Pokazać,że $Y = \sum_{k=1}^n X_k$ ma rzkld gamma z param. $b = (2\sigma^2)^{-1}, p = \frac{n}{2}$: $Y = \sum X_k^2$; $X_k \sim N(0,\sigma^2); \phi_{X_k}(t) = exp\{\frac{1}{2}\sigma^2t^2\}; G(t) = P(X_k^2 < t); g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{2\pi}\sigma}exp\{-\frac{t}{2\sigma^2}\}; X_k^2 \sim \gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sigma^2}); \phi_{X_k^2}(t) = 1/\sqrt{1 - 2\sigma^2 t}; \phi_Y(t) = E(e^{tY}) = E(\prod_k e^{tX_k^2}) = \prod(1/\sqrt{1-2\sigma^2t}) = 1/(1-2\sigma^2t)^{\frac{n}{2}}; Y \sim G(\frac{1}{2\sigma^2}, \frac{n}{2})$;

---

103. X_1, X_2 są niezal. X_1 ma rzkld wykł. z param. λ ($f_1(x) = \lambda exp\{-\lambda x\}, x > 0$), X_2 ma rzkld $f_2(x) = \lambda exp\{\lambda x\}, x < 0$. Wyznaczyć rzkld $X = X_1 + X_2$: $X = X_1 + X_2; U = X_1 \Rightarrow X_2 = X - U; J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow |J| = 1; f(x,u) = f_1(u)f_2(x-u) = \lambda exp\{-\lambda u\}\lambda exp\{\lambda x - \lambda u\} = \lambda^2 exp\{-2\lambda u + \lambda x\}; f_1(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}\int_x^\infty e^{-2\lambda u}du = \lambda^2 e^{\lambda x}\frac{1}{-2\lambda}(e^{-2\lambda u})|_x^\infty = -\lambda^2 e^{\lambda x}\frac{1}{2\lambda}(0 - e^{-2\lambda x}) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x}$

$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$, dla $p > 0, q > 0$

---

105. Udowodnić $B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}B(p, q-1)$

rozw: $B(p,q) = \begin{vmatrix} u = (1-x)^{q-1} & u' = -(q-1)(1-x)^{q-2} \\ v' = x^{p-1} & v = p^{-1}x^p \end{vmatrix} = p^{-1}x^p(1-x)^{q-1}|_0^1 + (q-1)p^{-1}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}dx = p^{-1}(q-1)\left[\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}dx - \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\right] = \frac{q-1}{p}B(p,q-1) - \frac{q-1}{p}B(p,q)$,
zatem $B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$

---

107. Sprawdź dla $p, q \in \mathbb{N}$, $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

rozw: wiemy $(p-1)\Gamma(p-1) = \Gamma(p)$, $\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt$; indukcja po q: **1.** $q = 1 \rightarrow B(p,1) = p^{-1}$, $\frac{\Gamma(p)\Gamma(1)}{\Gamma(p+1)} = \frac{\Gamma(p)\cdot 1}{\Gamma(p)\cdot p} = p^{-1}$ **2.** dla q OK; $B(p, q+1) \stackrel{Z105}{=} \frac{q}{p+q}B(p,q) = \frac{q}{p+q}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)}$

108. Wykazać dla $p > 0, q > 0$, $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

rozw: $\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx \cdot \int_0^\infty y^{q-1}e^{-y} = \int_0^\infty\int_0^\infty x^{p-1}y^{q-1}e^{-x-y}dxdy = \begin{vmatrix} x = s(1-t) & s = x+y & s \in (0,\infty) \\ y = st & t = y/(x+y) & t \in (0,1) \end{vmatrix} = \star;\ |J| = \left\|\begin{matrix} 1-t & -s \\ t & s \end{matrix}\right\| = s;\ \star = \int_0^\infty\int_0^1 s^{p-1}(1-t)^{p-1}s^{q-1}t^{q-1}e^{-s}s\ dtds = \int_0^\infty\int_0^1 s^{p+q-1}(1-t)^{p-1}t^{q-1}e^{-s}dtds = \int_0^\infty s^{p+q-1}e^{-s}ds \cdot \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt = \Gamma(p+q)B(p,q)$

---

110. wykaż $E(S^2) = \frac{n-1}{n}S^2$, dla $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i - \overline{X})^2$, gdzie $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, dla X_i w.oczekiw. μ, warian. σ^2

rozw: $E[X_i^2] = \sigma^2 + \mu^2$; $E[X_i\overline{X}] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E[X_iX_j] = \frac{1}{n}\sum_{j=1, j\neq i}^n \mu^2 + \frac{1}{n}E[X_i^2] = \frac{n-1}{n}\mu^2 + \frac{\sigma^2+\mu^2}{n} = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}$; $E[X^2] = E[(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i)(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j)] = E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j)] = E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_iX_j)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E[X_i\overline{X}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(\mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}) = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}$;

$E[S^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i^2 - 2X_i\overline{X} + \overline{X}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(E[X_i^2] - 2E[\overline{X}^2] + E[\overline{X}^2]) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(\sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n}) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{(n-1)\sigma^2}{n}$

111. Metodą największej wiarygodności (NW) znaleźć estymator parametru λ rozkładu Poissona.

Rozw. $f(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

$h(\lambda) = \prod f(k_i, \lambda) = \prod e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k_i}}{k_i!}$

$ln(h(\lambda)) = \sum ln(e^{-\lambda}) + \sum ln(\lambda^{k_i}) - \sum ln(k_i!) = nln(e^{-\lambda}) + \sum ln(\lambda^{k_i}) - \sum ln(k_i!) = -n\lambda + \sum k_i ln(\lambda) - \sum ln(k_i!)$

$(ln(h(\lambda)))' = -n + \sum \frac{k_i}{\lambda}$

$(ln(h(\lambda)))' = 0 \iff n = \frac{1}{\lambda}\sum k_i \iff \lambda = \frac{1}{n}\sum k_i$

112. Metodą momentów znaleźć dwa estymatory parametru λ rozkładu Poissona.

Rozw. $f(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

$m_j = \frac{1}{n}\sum k_i^j$
$EX = m_1 = \lambda$
$\lambda = \frac{1}{n}\sum k_i$
$D^2X = m_2 - m_1^2 = \lambda$
$\lambda = \frac{1}{n}\sum k_i^2 - (\frac{1}{n}\sum k_i)^2$

116. Znaleźć estymator parametru p w rozkładzie Bernoulliego $B(n,p)$.

Rozw. $f(k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

$m_j = \frac{1}{n}\sum k_i^j$
$EX = m_1 = np$
$np = \frac{1}{n}\sum k_i$
$p = \frac{1}{n^2}\sum k_i$

113. Metodą NW znaleźć estymator parametru μ rozkładu normalnego.

Rozw. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$

$h(\mu) = \prod \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp(-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2})$

$ln(h(\mu)) = \sum ln(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}) + \sum ln(exp(-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2})) = \sum ln(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}) + \sum -\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} = \sum ln(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i - \mu)^2$

$(ln(h(\mu)))' = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum 2(x_i - \mu)(-1) = \frac{1}{2\sigma^2}\sum 2(x_i - \mu) = \frac{1}{\sigma^2}(\sum x_i - n\mu)$

$(ln(h(\mu)))' = 0 \iff \frac{1}{\sigma^2}(\sum x_i - n\mu) = 0 \iff \sum x_i = n\mu \iff \mu = \frac{1}{n}\sum x_i$

---

114. Metodą NW znaleźć estymator parametru σ^2 rozkładu normalnego.

Rozw. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$

$h(\sigma) = \prod \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp(-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2})$

$ln(h(\sigma)) = \sum ln(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}) + \sum ln(exp(-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2})) = -\sum ln(\sqrt{2\pi}\sigma) + \sum -\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} = -\sum ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2$

$(ln(h(\sigma)))' = -\sum \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\sqrt{2\pi} + \frac{1}{\sigma^3}\sum(x_i - \mu)^2 = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum(x_i - \mu)^2$

$(ln(h(\sigma)))' = 0 \iff -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum(x_i-\mu)^2 = 0 \iff n\sigma^2 = \sum(x_i - \mu)^2 \iff \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i - \mu)^2$

115. Metodą momentów znaleźć estymatory parametrów μ i σ rozkładu normalnego.

Rozw. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$

$m_j = \frac{1}{n}\sum k_i^j$
$EX = m_1 = \mu$
$\mu = \frac{1}{n}\sum k_i$
$D^2X = m_2 - m_1^2 = \sigma^2$
$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum k_i^2 - (\frac{1}{n}\sum k_i)^2$
$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum k_i^2 - (\frac{1}{n}\sum k_i)^2}$

117. $X \sim U[\Theta - a, \Theta + a]$
$f(x,\Theta) = \frac{1}{\Theta + a - \Theta + a} = \frac{1}{2a}$
$h(x,\Theta) = \prod_{i=1}^n f(x,\Theta) = (2a)^{-n}$
$l(x,\Theta) = ln(h(x,\Theta)) = -n\log 2 - \log a$
$l'(x,\Theta) = 0 \rightarrow \Theta$dowolne

---

118. $f(x,\Theta,a) = \frac{1}{2a}$
$h(x,\Theta) = \prod_{i=1}^n f(x, Theta, a) = (2a)^{-n}$
$l(x,\Theta) = \log h(x,\Theta) = -n\log 2a$
$l'(x,\Theta) = 0 \rightarrow \Theta$dowolne

119. Znaleźć (metodą NW) estymator parametru n rozkładu Bernoulliego. Rozważyć przypadki: p znane, p nieznane.

Rozw. $f(k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

a) $h(n) = \frac{f(k+1)}{f(k)} = \frac{\binom{n}{k}(1-p)}{\binom{n}{k+1}p} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}(1-p)}{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}p} = \frac{(k+1)(1-p)}{(n-k)p}$

$h(n) < 1 \iff \frac{(k+1)(1-p)}{(n-k)p} < 1 \iff (k+1)(1-p) < (n-k)p \iff k + 1 - p < np \iff \frac{k+1-p}{p} < n; \quad n = \lfloor\frac{k+1-p}{p}\rfloor + 1$

Tw. Moivre'a-Laplace'a (z którego korzystamy w poniższych zadaniach)
Jeśli S_n jest ciągiem zmiennych losowych o rozkładzie dwumianowym wtedy mamy:
$P(y_1 \leqslant S_n \leqslant y_2) = P(z_1 \leqslant Z_n \leqslant z_2) \simeq \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$
gdzie $z_1 = \frac{y_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $z2 = \frac{y_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$ i Φ jest dystrybuantą rozkładu normalnego.

---

120. S_n - liczba sukcesów w n próbach, $np = 800$, $npq = 160$.
a) $P(S_n > 800) = 1 - P(S_n \leqslant 800) = 1 - P(Z_n < \frac{800-800}{\sqrt{160}}) = 1 - \Phi(0)$
b) $P(S_n < 900) = P(Z_n < \frac{900-800}{\sqrt{160}}) = \Phi(\frac{100}{\sqrt{160}})$ C) $P(700 \leqslant S_{1000} \leqslant 800) = P(699,5 < S_{1000} < 800,5) = \Phi(\frac{5}{100\sqrt{160}}) - \Phi(-\frac{105}{\sqrt{160}})$

---

121. $S_n = \sum_{i=1}^{100} X_i$ - wagi przedmiotów, $ES_n = \sum_{i=1}^{100} EX_i = 5000$, $D^2S_n = \sum_{i=1}^{100} = D^2X_i = 1600$
$P(S_n > 4500) = 1 - P(S_n \leqslant 4500) = 1 - \Phi(-\frac{500}{40}) = \Phi(\frac{50}{40})$

---

122. $S_n = \sum_{i=1}^{100} X_i$ - rzuty kostą, $ES_n = \sum_{i=1}^{100} EX_i = 100 * 3,5 = 350$, $D^2S_n = \sum_{i=1}^{100} D^2X_i = 100 * \frac{35}{12}$
a) $P(S_n > 390) = 1 - P(S_n \leqslant 390) = 1 - \Phi(\frac{40}{\sqrt{\frac{3500}{12}}})$
b) $P(S_n < 400) = \ldots$, c) $P(320 \leqslant S_n \leqslant 390) = \ldots$

---

123. Niech sukcesem będzie wylosowanie dobrej sztuki $p = 0,9$, $n = 100$, $np = 90$, $npq = 9$
$P(S_n > 85) = 1 - P(S_n \leqslant 85) = \Phi(\frac{85-90}{\sqrt{9}})$