

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 9.

1. Ze zbioru n -elementowego wybieramy losowo niepusty podzbiór (każdy z podzbiorów jest jednakowo prawdopodobny). Wartością zmiennej losowej X jest liczba elementów wylosowanego podzbioru. Wykazać, że $E(X) = \frac{n}{2 - (.5)^{n-1}}$.
2. Załóżmy, że zmienna losowa X ma rozkład $Beta(p, q)$. Wykazać, że $E(X) = \frac{p}{p+q}$,
 $D^2(X) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$.
3. Metodą największej wiarygodności znaleźć estymator parametru λ rozkładu Poissona.
4. Niech $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, gdzie $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$. Wykazać, że $E(S^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$. War-
tość oczekiwana i wariancja X_k są równe, odpowiednio, μ, σ^2 .
Wskazówka: $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu)^2 - (\bar{X} - \mu)^2$.
5. Niech zmienna losowa X ma rozkład Cauchy'ego. Wykazać, że taki sam rozkład ma zmienna $Y = 1/X$.
6. Metodą momentów znaleźć dwa estymatory parametru λ rozkładu Poissona.
7. Znaleźć estymator parametru p w rozkładzie Bernoulliego $B(n, p)$.
8. Metodą NW znaleźć estymator parametru θ rozkładu jednostajnego na przedziale $[\theta - a; \theta + a]$, przy założeniu, że znana jest wartość parametru a .
9. Metodą NW znaleźć estymator parametru θ rozkładu jednostajnego na przedziale $[\theta - a; \theta + a]$, przy założeniu, że nie jest znana wartość parametru a .
10. Niezależne zmienne $X_1, \dots, X_5$ mają ten sam, ciągły, rozkład. Oznaczmy przez p prawdopodobieństwo $P(X_1 < X_2 > X_3 < X_4 > X_5)$. Wykazać, że p nie zależy od gęstości rozkładu $f(x)$ zmiennych X_k . Obliczyć wartość p .

Niech $X_1, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi o tym samym, ciągłym rozkładzie. Mówimy, że w chwili j notujemy rekord ($j \leq n$), jeśli $X_j \geq X_i$ dla $1 \leq i \leq j$. Niech zmienna losowa Z będzie liczbą rekordów w ciągu $\{X_k\}$.

11. Wykazać, że $E(Z) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$.
12. Wykazać, że $D^2(Z) = \sum_{j=1}^n \frac{j-1}{j^2}$.