

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 8

1. Niech X będzie zmienną losową o gęstości $f(x) = c(1 - x^2)$, gdzie $-1 < x < 1$. Obliczyć wartość stałej c . Wyznaczyć postać dystrybuanty tej funkcji.
2. Urządzenie pracuje przez losowy odcinek czasu X . Załóżmy, że gęstość X (mierzona tygodniami) dana jest wzorem $Cxe^{-x/2}$, dla $x > 0$. Jakie jest ppb, że urządzenie będzie pracowało przez 5 tygodni lub dłużej?
3. Niech $f_1(x) = C_1(2x - x^3)$, dla $0 < x < 2.5$; $f_2(x) = C_2(2x - x^2)$, dla $0 < x < 2.5$. Która z funkcji f_1, f_2 może być gęstością?
4. Czas pracy pewnego urządzenia (mierzony w godzinach) jest zmienną losową o gęstości $f(x) = 10/x^2$, dla $x > 10$.
 - (a) Obliczyć $P(X > 20)$.
 - (b) Znaleźć dystrybuantę zmiennej X .
 - (c) Jakie jest ppb, że spośród 6 takich urządzeń przynajmniej 3 będą pracować 15 godzin lub dłużej?
5. Pociągi do miejscowości A odjeżdżają co 10 minut, rozpoczynając od 7.00. Pociągi do miejscowości B odjeżdżają co 15 minut, rozpoczynając od 7.05. Pasażer P_1 przychodzi na stację w czasie o rozkładzie jednostajnym pomiędzy 7.00 a 8.00; pasażer P_2 przychodzi na stację w czasie o rozkładzie jednostajnym pomiędzy 7.10 a 8.10. Jakie jest ppb, że pasażer P_1 dojedzie do A? Jakie jest ppb, że pasażer P_2 dojedzie do A?
6. Zmienna losowa X ma dyskretny rozkład jednostajny

$$P(X = i) = \frac{1}{100}, \quad i \in \{1, 2, \dots, 99, 100\}.$$

Zmienne losowe Y oraz Z określone są następująco

$$Y = \begin{cases} 1, & 2|X \vee 3|X, \\ 0, & \text{wpw,} \end{cases} \quad Z = \begin{cases} 1, & 3|X, \\ 0, & \text{wpw.} \end{cases}$$

Znaleźć wartość współczynnika korelacji ρ zmiennych Y i Z . (Odp.: $\rho = \frac{33}{67}$)

7. (2p.) Wskaźnikiem asymetrii zmiennej losowej X nazywamy wielkość $\gamma(X) = \frac{E((X - \mu)^3)}{\sigma^3}$. Zmienna losowa X przyjmuje wartości 0, 1, 2 z ppb p , 0.5 , $0.5 - p$, gdzie $0 \leq p \leq 0.5$.
 - (a) Znaleźć wartość $\gamma(X)$.
 - (b) Znaleźć wartości p , dla których $\gamma(X) = 0$.
 - (c) Znaleźć $\gamma(X)$ dla $p = \frac{1}{8}$.

(Odp.: $\gamma(X) = \frac{128p(p - \frac{1}{2})(p - \frac{1}{4})}{(2 - (4p - 1)^2)^{3/2}}$)
8. Niech zmienna losowa X_n ma gęstość określoną wzorem

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!} a^n x^{n-1} e^{-ax}, & x > 0, \\ 0, & \text{wpw,} \end{cases}$$

gdzie stała $a > 0$. Obliczyć wartość $\gamma(X_n)$ i sprawdzić, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(X_n) = 0$.

Boki prostokąta są zmiennymi niezależnymi losowymi X_1 i X_2 o rozkładzie $U[1; 2]$. $Y_1 = 2X_1 + 2X_2$ jest obwodem tego prostokąta, $Y_2 = X_1X_2$ oznacza pole tego prostokąta.

9. Znaleźć wartości oczekiwane i wariancje zmiennych Y_1, Y_2 . (Odp.: 6, 2/3 dla Y_1 , 9/4, 55/144 dla Y_2).
10. Obliczyć wartość współczynnika korelacji ρ zmiennych Y_1, Y_2 . (Odp.: $\frac{3\sqrt{330}}{55}$).

Witold Karczewski