

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 1.

1. Wyznaczyć dystrybuantę i obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej X o rozkładzie

x_i	2	3	4	5
p_i	0.2	0.4	0.1	0.3

2. Dystrybuanta F zmiennej losowej X określona jest następująco:

x	$(-\infty; -2]$	$(-2; 3]$	$(3; 5]$	$(5; \infty)$
$F(x)$	0	0.2	0.7	1

Znaleźć funkcję prawdopodobieństwa (gęstość) i wartość oczekiwaną EX tej zmiennej.

Mówimy, że zmienne X, Y są niezależne, wtedy gdy – w wypadku dyskretnym – spełniony jest warunek $P(X = x_i, Y = y_k) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_k)$.

3. Zmienna X ma rozkład $B(n_1, p)$ a zmienna Y rozkład $B(n_2, p)$. Zmienne są niezależne. Wykazać, że zmienna $Z = X + Y$ ma rozkład $B(n_1 + n_2, p)$.
4. Niezależne zmienne losowe X, Y mają rozkład Poissona z parametrami λ_1 i λ_2 . Wykazać, że zmienna $Z = X + Y$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda_1 + \lambda_2$.
5. Prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie jest równe p . Wykonujemy (niezależne) próby do otrzymania sukcesu. Zmienną losową X określamy jako liczbę przeprowadzonych prób. Wyznaczyć rozkład zmiennej X , tzn. podać jej funkcję prawdopodobieństwa (gęstości). Obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej X .
6. Prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie jest równe p . Wykonujemy doświadczenie do momentu uzyskania 2 sukcesów. Zmienna losowa X to liczba przeprowadzonych prób. Wyznaczyć rozkład zmiennej X , tzn. podać jej funkcję prawdopodobieństwa. Obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej X .
7. Prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie jest równe p . Powtarzamy doświadczenie aż do uzyskania sukcesu, nie więcej jednak niż $n = 4$ razy. Wyznaczyć rozkład takiej zmiennej oraz jej wartość oczekiwaną.
8. Obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej X o rozkładzie geometrycznym.
 $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$.

Niech N, m, k będą ustalonymi liczbami naturalnymi ($0 \leq m \leq N, 1 \leq n \leq N$). Funkcja gęstości zmiennej losowej X o rozkładzie hipergeometrycznym określona jest wzorem

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k \in \{\max\{0, n + m - N\}, \dots, \min\{m, n\}\}$$

9. Sprawdzić, że $E(X) = \frac{nm}{N}$.
10. (2 punkty) Sprawdzić, że $V(X) = \frac{nm(N-m)(N-n)}{N^2(N-1)}$