

Rachunek prawdopodobieństwa dla informatyków – lista 4

1. (10p) Niech dystrybucja F zmiennej losowej X będzie funkcją ciągłą i ściśle rosnącą. Dowieść, że zmienna losowa $F(X)$ ma rozkład jednostajny na odcinku jednostkowym. Korzystając z tego zadania podać przepis na generowanie za pomocą generatora liczb losowych z przedziału $[0,1]$, zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym.
2. (10p) Przesyłane siecią pliki mogą z prawdopodobieństwem a/n być poprawnie przesłane, a z prawdopodobieństwem $1-a/n$ w trakcie przesyłu sieć się może zawiesić lub nastąpi uszkodzenie pliku. Wysyłamy plik aż do poprawnego przesłania. Załóżmy, że prędkość sieci pozwala na dokonanie n prób na sekundę. Niech X_n oznacza czas (w sekundach) oczekiwania na pierwsze poprawne przesłanie pliku. Wyznaczyć dystrybucję X_n i zbadać jej zachowanie przy $n \rightarrow \infty$.
3. (10p) W urnie mamy b kul białych i c czarnych. Po wyciągnięciu kuli z urny wrzucamy ją z powrotem i dokładamy d kul tego samego koloru. Jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia k kul czarnych w n losowaniach?
4. (10p) Gracze A i B rzucają monetą dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi p . Jeśli wypadnie orzeł, to A wygrywa 1\$, w przeciwnym przypadku B wygrywa 1\$. Załóżmy, że A ma nieograniczony kapitał i gra aż wygra b \$. Znaleźć prawdopodobieństwo wygranej gracza A.
5. (10p) W turnieju rycerskim bierze udział 2^n rycerzy (system turniejowy). Obaj uczestnicy każdego pojedynku mają równe szanse na zwycięstwo. Wśród uczestników jest 2 braci. Jaka jest szansa, że spotkają się w pojedynku?
6. (10p) Szansa wygrania pojedynczej partii przez A wynosi p i do zakończenia całej gry brakuje mu a wygranych. Jego przeciwnikowi brakuje b wygranych. Niestety pojedynek musi zostać przerwany. Jak sprawiedliwie podzielić stawkę?
7. (10p) Przesyłane siecią pliki mogą z prawdopodobieństwem p być poprawnie przesłane, prawdopodobieństwem q być przesłane ale z pewnymi uszkodzeniami albo z prawdopodobieństwem $1-p-q$ w trakcie przesyłu sieć się może zawiesić. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w trakcie wielokrotnego (niezależnego) przesyłania plików poprawne przesłanie nastąpi przed zawieszeniem sieci?
8. (10p) Przypuśćmy, że obok ułożonej w rzędzie talii n różnych kart rozkładamy drugą (potasowaną) talię. Koincydencją na i -tym miejscu nazywamy zdarzenie, że i -te karty z obu talii są takie same. Obliczyć oczekiwaną ilość koincydencji.
9. (10p) Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję następujących rozkładów:
 - a) Dwumianowy $B(n,p)$
 - b) Geometryczny $G(p)$
 - c) Poissona $P(\lambda)$
 - d) Wykładniczy $E(\lambda)$
10. (10p) Loteria ma 1 milion losów, wśród których jest 1 o wygranej 100000 zł., 9 o wygranej 5000 zł., 90 o wygranej 500 zł., 900 o wygranej 50 zł. Oblicz oczekiwaną wygraną, jeśli kupujemy 1 los, 100 losów. Gdyby sprzedano 70% biletów, każdy w cenie 2 zł, to jaka byłaby spodziewana kwota do wypłacenia i spodziewany zysk?
11. (10p) Wektor losowy jest postaci

| | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| X\Y | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 0.3 | 0.2 | 0.1 |
| 3 | 0.2 | 0.1 | a |

Wyznaczyć a . Podać rozkłady brzegowe. Wyliczyć EX , EY , $E(X^2)$, $E(Y^2)$, $Cov(X,Y)$.

12. (10p) Znaleźć przykład potwierdzający, że rozkłady brzegowe nie wyznaczają jednoznacznie rozkładu łącznego wektora losowego (X, Y) .
13. (10p) Znaleźć gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y będącej polem koła, którego promień jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 2]$.
14. (10p) Algorytm losowo produkuje litery z alfabetu 26-znakowego. Jaka jest spodziewana ilość wystąpień słowa „robak” w ciągu 1000000 znaków?
15. (10p) Rzucamy kostką aż do momentu, gdy wypadną pod rząd dwie „6”. Jaka jest oczekiwana liczba rzutów? (Podpowiedź: nie jest to 36).
16. (5p) Znaleźć przykład pary zmiennych losowych (X, Y) , które są zależne, ale $\text{Cov}(X, Y) = 0$.
17. (5p) Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję iloczynu dwóch niezależnych zmiennych losowych X, Y o rozkładach jednostajnych : X na $[0, 1]$, Y na $[1, 3]$.