Rachunek prawdopodobieństwa dla informatyków – lista 4

1. (10p) Przesyłane siecią pliki mogą z prawdopodobieństwem a/n być poprawnie przesłane, a z prawdopodobieństwem $1\text{-}a/n$ w trakcie przesyłu sieć się może zawiesić lub nastąpi uszkodzenie pliku. Wysyłamy plik aż do poprawnego przesłania. Załóżmy, że prędkość sieci pozwala na dokonanie n prób na sekundę. Niech X_n oznacza czas (w sekundach) oczekiwania na pierwsze poprawne przesłanie pliku. Wyznaczyć dystrybuantę X_n i zbadać jej zachowanie przy $n \to \infty$.
2. (10p) W urnie mamy b kul białych i c czarnych. Po wyciągnięciu kuli z urny wrzucamy ją z powrotem i dokładamy d kul tego samego koloru. Jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia k kul czarnych w n losowaniach?
3. (10p) Gracze A i B rzucają monetą dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi p. Jeśli wypadnie orzeł, to A wygrywa 1$, w przeciwnym przypadku B wygrywa 1$. Załóżmy, że A ma nieograniczony kapitał i gra aż wygra b$. Znaleźć prawdopodobieństwo wygranej gracza A.
4. (10p) W turnieju rycerskim bierze udział 2^n rycerzy (system turniejowy). Obaj uczestnicy każdego pojedynku mają równe szanse na zwycięstwo. Wśród uczestników jest 2 braci. Jaka jest szansa, że spotkają się w pojedynku?
5. (10p) Szansa wygrania pojedynczej partii przez A wynosi p i do zakończenia całej gry brakuje mu a wygranych. Jego przeciwnikowi brakuje b wygranych. Niestety pojedynek musi zostać przerwany. Jak sprawiedliwie podzielić stawkę?
6. (10p) Przesyłane siecią pliki mogą z prawdopodobieństwem p być poprawnie przesłane, prawdopodobieństwem q być przesłane ale z pewnymi uszkodzeniami albo z prawdopodobieństwem 1-p-q w trakcie przesyłu sieć się może zawiesić. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w trakcie wielokrotnego (niezależnego) przesyłania plików poprawne przesłanie nastąpi przed zawieszeniem sieci?
7. (10p) Przypuśćmy, że obok ułożonej w rzędzie talii n różnych kart rozkładamy drugą (potasowaną) talię. Koincydencją na i-tym miejscu nazywamy zdarzenie, że i-te karty z obu talii są takie same. Obliczyć oczekiwaną ilości koincydencji.
8. (10p) Wektor losowy jest postaci

X\Y	1	2	3
0	0.3	0.2	0.1
3	0.2	0.1	a

Wyznaczyć a. Podać rozkłady brzegowe. Wyliczyć EX, EY, $E(X^2)$, $E(Y^2)$, $Cov(X,Y)$.

9. (10p) Znaleźć przykład potwierdzający, że rozkłady brzegowe nie wyznaczają jednoznacznie rozkładu łącznego wektora losowego (X,Y).
10. (10p) Algorytm losowo produkuje litery z alfabetu 26-znakowego. Jaka jest spodziewana ilość wystąpień słowa „robak" w ciągu 1000000 znaków?
11. (10p) Rzucamy kostką aż do momentu, gdy wypadną pod rząd dwie „6". Jaka jest oczekiwana liczba rzutów? (Podpowiedź: nie jest to 36).
12. (5p) Znaleźć przykład pary zmiennych losowych (X,Y), które są zależne, ale Cov(X,Y)=0.
13. (5p) Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję iloczynu dwóch niezależnych zmiennych losowych X,Y o rozkładach jednostajnych : X na [0,1], Y na [1,3].
14. (10p) Loteria ma 1 milion losów, wśród których jest 1 o wygranej 100000 zł., 9 o wygranej 5000 zł., 90 o wygranej 500 zł., 900 o wygranej 50 zł. Oblicz oczekiwaną wygraną, jeśli kupujemy 1 los, 100 losów. Gdyby sprzedano 70% biletów, każdy w cenie 2 zł, to jaka byłaby spodziewana kwota do wypłacenia i spodziewany zysk?

15. (10p) Niech dystrybuanta F zmiennej losowej X będzie funkcją ciągłą i ściśle rosnącą. Dowieść, że zmienna losowa F(X) ma rozkład jednostajny na odcinku jednostkowym. Korzystając z tego zadania podać przepis na generowanie za pomocą generatora liczb losowych z przedziału [0,1], zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym.
16. (10p) Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję następujących rozkładów:
    a) Dwumianowy B(n,p)
    b) Geometryczny G(p)
    c) Poissona $P(\lambda)$
    d) Wykładniczy $E(\lambda)$
17. (10p) Znaleźć gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y będącej polem koła, którego promień jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale [0,2].
18. (5p) Liczba wypadków zdarzających się na autostradzie w ciągu doby jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem 5. Obliczyć prawdopodobieństwo, że
    a) nie będzie dziś żadnego wypadku
    b) będą co najmniej 2 wypadki
    c) będą co najwyżej 2 wypadki.
19. (10p) Niech $X \sim N(7,9)$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że zmienna losowa X przyjmuje wartości (korzystając z tablic)
    a) mniejsze od 8,5
    b) większe od 3,7
    c) leżące między 2,5 a 11,2.
20. (5p) Niech $X \sim N(95,\sigma^2)$. Znajdź wariancję, jeśli wiadomo, że 20% obszaru pod wykresem gęstości leży na prawo od 103,4.
21. (5p) Niech $X \sim N(m,(24.5)^2)$. Znajdź m, jeśli $P(X<60)=0.3745$.
22. (5p) Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 4. Znaleźć rozkład zmiennej losowej Y=3X+4. Obliczyć gęstość Y.