

Rachunek prawdopodobieństwa dla informatyków – lista 3

1. (10p) Mamy 20 kartek ponumerowanych liczbami od 0 do 19. Wybieramy losowo jedna z nich. Niech X oznacza sumę cyfr na wylosowanej kartce. Podać rozkład zmiennej losowej X , jej dystrybuantę. Sporządzić wykres dystrybuanty.
2. (10p) Dystrybuanta zmiennej losowej X jest postaci

$$F(t) = \begin{cases} 0 & : t < 0 \\ 1/2 & : 0 \leq t < 1; \\ 1 & : t \geq 1 \end{cases}$$

Znaleźć rozkład X . Obliczyć $P(X < 1/2)$, $P(X \leq 1/2)$, $P(X < 1)$, $P(X \leq 1)$, $P(X = 1)$, $P(X = 1/2)$, $P(X > 3/4)$, $P(0 < X < 2/3)$.

3. (10p) Zmienna losowa X ma rozkład postaci

$$P(X = n) = \frac{c}{n(n+1)} \text{ dla } n=1,2,\dots$$

Wyznacz wartość c . Oblicz $P(X > m)$ dla $m=0,1,\dots$.

4. (10p) Prawdopodobieństwo uszkodzenia pracującego komputera podczas przepięcia w sieci elektrycznej wynosi $1/4$. W trakcie przepięcia włączonych było 5 komputerów. Jaka jest szansa, że awarii uległo
 - a) dokładnie k komputerów, $k=0,1,\dots,5$
 - b) co najmniej k komputerów, $k=0,1,\dots,5$
 - c) co najwyżej k komputerów, $k=0,1,\dots,5$
5. (10p) Wiadomo z obserwacji, że 5% nowo wyprodukowanych komputerów ulega awarii tuż po zainstalowaniu systemu operacyjnego. Firma produkująca komputery dostała zamówienie na zainstalowanie sieci 50 komputerów w odległym mieście. Postanowiono zabrać na montaż 52 komputery. Jaka jest szansa, że uda się uruchomić sieć? Ile komputerów należałoby zabrać aby mieć pewność 99%?
6. (10p) Wiadomo, że prawdopodobieństwo poprawnego przesłania pakietu w trakcie pojedynczej sesji wynosi p . Jaka jest najbardziej prawdopodobna ilość poprawnie przesłanych pakietów, gdy przesłano niezależnie ich n ?
7. (10p) Jak długi powinien być ciąg cyfr losowych aby prawdopodobieństwo wystąpienia co najmniej raz cyfry 5 wynosiło co najmniej 95%? Jakie jest prawdopodobieństwo, że cyfra 5 pojawi się po raz pierwszy jako piąty element?
8. (5p) Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie przyjmującym wartości 1,2,3,4 z prawdopodobieństwami 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 odpowiednio. Znajdź rozkład $X+Y$. Oblicz $E(X)$, $E(XY)$.
9. (5p) Niech X, Y będą niezależnymi dyskretnymi zmiennymi losowymi przyjmującymi wartości ze zbioru liczb naturalnych. Udowodnić (z definicji), że dla wszystkich i, j naturalnych $P(X=i; Y=j) = P(X=i)P(Y=j)$.
10. (5p) Wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej z zadania 2.
11. (5p) Niech X będzie nieujemną zmienną losową o gęstości $f(\cdot)$ i skończonej wartości oczekiwanej. Wykazać, że

$$E(X) = \int_0^{\infty} P(X > t) dt.$$