Imię i nazwisko: ..............................

| 1 | 2 | 3 | 4 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

**Rachunek prawdopodobieństwa dla informatyków**

# Kolokwium *ostatniej szansy* (20.01.2010)

1. Fakt: Jeśli $X_1$ i $X_2$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ i $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ odpowiednio, to $X_1 + X_2$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

   Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, 1)$. Korzystając z podanego faktu oraz tablic, wyznaczyć $n$ takie, że

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| < 0.4\right) \approx 0.95 .$$

Z podanego faktu wynika, że jeśli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, to $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$ (proszę to pamiętać), zatem $\frac{X}{n}$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ (bo $\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\frac{1}{n}X\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}\mathrm{ar}X$). W naszym przypadku $\frac{X}{n}$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1/n)$. Dalej:

$$\mathbf{P}\left(|X/n| < 0.4\right) = \mathbf{P}\left(-0.4 < X/n < 0.4\right) = \Phi\left(\frac{0.4 - 0}{\sqrt{1/n}}\right) - \Phi\left(\frac{-0.4 - 0}{\sqrt{1/n}}\right) = 2\,\Phi\left(0.4\sqrt{n}\right) - 1 .$$

Zatem $0.4\sqrt{n}$ to punkt, w którym dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego przyjmuje wartość $\frac{0.95+1}{2} = 0.975$. Ostatecznie:

$$0.4\sqrt{n} \approx 1.96 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} \approx 4.9 \quad \Rightarrow \quad n \approx 24 .$$

Imię i nazwisko: ..............................

2. Dwie osoby rzucają niezależnie po $n$ razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każda z nich otrzyma tę samą liczbę orłów? Zinterpretować wynik.

   Wskazówka: Jeśli $X$ i $Y$ są dyskretnymi zmiennymi losowymi, to

$$\mathbf{P}(X = Y) \;=\; \mathbf{P}\left(\bigcup_{k}\{X = Y = k\}\right) .$$

W zadaniu tym należy policzyć $\mathbf{P}(X = Y)$, gdzie $X$ i $Y$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie Bernoulliego $B(n, 1/2)$.

Rozwiązanie 1: Można zauważyć, że rozkład zmiennej losowej $Y$ jest taki sam jak rozkład zmiennej losowej $n - Y$ (bo moneta jest symetryczna – rozkład ilości orłów jest taki sam jak rozkład ilości reszek), zatem

$$\mathbf{P}(X = Y) \;=\; \mathbf{P}(X = n - Y) \;=\; \mathbf{P}(X + Y = n) \;=\; \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} ,$$

ponieważ $X + Y$ ma rozkład Bernoulliego $B(2n, 1/2)$.

Rozwiązanie 2:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X = Y) \;&=\; \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n}\{X = Y = k\}\right) \;=\; \sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}\left(X = k, Y = k\right) \;\overset{(*)}{=}\; \sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(X = k)\mathbf{P}(Y = k) \\ &=\; \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n} \;=\; \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 \;=\; \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} ,\end{aligned}$$

a to jest prawdopodobieństwo, że w $2n$ próbach Bernoulliego otrzymamy dokładnie $n$ sukcesów, czyli $\mathbf{P}(X + Y = n)$.
W $(*)$ skorzystaliśmy z założenia, że zmienne losowe $X$ i $Y$ są niezależne o jednakowym rozkładzie.

Imię i nazwisko: ..............................

3. Znaleźć funkcję tworzącą momenty dla zmiennej losowej $X$ o rozkładzie Poissona $Poi(\lambda)$, tzn.

$$\mathbf{P}(X=k) \;=\; \frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda} \qquad \text{dla} \quad k=0,1,\dots\;.$$

Korzystając z otrzymanej postaci, udowodnić, że jeśli $X_1$ i $X_2$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona $Poi(\lambda_1)$ i $Poi(\lambda_2)$ odpowiednio, to $X_1+X_2$ ma również rozkład Poissona i podać jego parametry.

Wskazówka:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \;=\; e^x \qquad \text{dla każdego} \quad x\in\mathbb{R}\;.$$

Liczymy funkcję tworzącą momenty dla zmiennej losowej o rozkładzie Poissona $Poi(\lambda)$:

$$\begin{aligned} M_X(t) \;&=\; \mathbb{E}\,e^{tX} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk}\,\mathbf{P}(X=k) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk}\,\frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda} \;=\; e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\,e^t)^k}{k!} \\ &=\; e^{-\lambda}\,\exp(\lambda\,e^t) \;=\; \exp\big(\lambda\,(e^t-1)\big)\;. \end{aligned}$$

Następnie policzymy funkcję tworzącą momenty dla zmiennej losowej $X_1+X_2$:

$$\begin{aligned} M_{X_1+X_2}(t) \;&=\; \mathbb{E}\,e^{t(X_1+X_2)} \;=\; \mathbb{E}\,e^{tX_1}\,e^{tX_2} \;\overset{(*)}{=}\; \mathbb{E}\,e^{tX_1}\,\mathbb{E}\,e^{tX_2} \\ &=\; \exp\big(\lambda_1\,(e^t-1)\big)\cdot\exp\big(\lambda_2\,(e^t-1)\big) \;=\; \exp\big((\lambda_1+\lambda_2)\,(e^t-1)\big)\;, \end{aligned}$$

co jest funkcją tworzącą momenty dla zmiennej losowej o rozkładzie Poissona $Poi(\lambda_1+\lambda_2)$.
W $(*)$ skorzystaliśmy z niezależności zmiennych losowych $X_1$ i $X_2$.

Imię i nazwisko: ...............................

4. a) (4 punkty) Niech $X$ i $Y$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie z dystrybuantą $F_X$ i $F_Y$ odpowiednio. Znaleźć dystrybuantę zmiennej losowej $\max(X, Y)$ .

b) (6 punktów) Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym $Ex(\lambda)$ (tzn. $F_{X_i}(t) = 1 - e^{\lambda t}$ dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$). Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej $\min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, tzn.

$$\mathbf{P}(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \le t) \;=\; 1 \;-\; \mathbf{P}(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) > t)\;.$$

Co to za rozkład?

a)

$$\mathbf{P}(\max(X, Y) \le t) \;=\; \mathbf{P}(X \le t, Y \le t) \overset{(*)}{=} \mathbf{P}(X \le t) \cdot \mathbf{P}(Y \le t) \;=\; F_X(t)\, F_Y(t)\;.$$

W $(*)$ skorzystaliśmy z niezależności zmiennych losowych $X$ i $Y$.

b)

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \le t) \;&=\; 1 \;-\; \mathbf{P}(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) > t) \\
&=\; 1 \;-\; \mathbf{P}(X_1 > t, X_1 > t, \ldots, X_n > t) \\
&\overset{(*)}{=}\; 1 \;-\; \mathbf{P}(X_1 > t) \cdot \mathbf{P}(X_2 > t) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(X_n > t) \\
&=\; 1 \;-\; (\mathbf{P}(X_1 > t))^n \;=\; 1 \;-\; (e^{\lambda t})^n \;=\; 1 \;-\; e^{n\lambda\, t}\;,
\end{aligned}$$

co jest dystrybuantą zmiennej losowej o rozkładzie wykładniczym $Ex(n\lambda)$.
W $(*)$ skorzystaliśmy z założenia, że zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne o jednakowym rozkładzie.