

Imię i nazwisko:

1	2	3	4	Σ

Rachunek prawdopodobieństwa dla informatyków

Kolokwium *ostatniej szansy* (20.01.2010)

1. Fakt: Jeśli X_1 i X_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ i $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ odpowiednio, to $X_1 + X_2$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, 1)$. Korzystając z podanego faktu oraz tablic, wyznaczyć n takie, że

$$\mathbf{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right| < 0.4 \right) \approx 0.95 .$$

Imię i nazwisko:

2. Dwie osoby rzucają niezależnie po n razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każda z nich otrzyma tę samą liczbę orłów? Zinterpretować wynik.

Wskazówka: Jeśli X i Y są dyskretnymi zmiennymi losowymi, to

$$\mathbf{P}(X = Y) = \mathbf{P}\left(\bigcup_k \{X = Y = k\}\right).$$

Imię i nazwisko:

3. Znaleźć funkcję tworzącą momenty dla zmiennej losowej X o rozkładzie Poissona $Poi(\lambda)$, tzn.

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots .$$

Korzystając z otrzymanej postaci, udowodnić, że jeśli X_1 i X_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona $Poi(\lambda_1)$ i $Poi(\lambda_2)$ odpowiednio, to $X_1 + X_2$ ma również rozkład Poissona i podać jego parametry.

Wskazówka:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R} .$$

Imię i nazwisko:

4. a) (4 punkty) Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie z dystrybucją F_X i F_Y odpowiednio. Znaleźć dystrybucję zmiennej losowej $\max(X, Y)$.
- b) (6 punktów) Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym $Ex(\lambda)$ (tzn. $F_{X_i}(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$). Wyznaczyć dystrybucję zmiennej losowej $\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$, tzn.

$$\mathbf{P}(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq t) = 1 - \mathbf{P}(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) > t).$$

Co to za rozkład?

