Imię i nazwisko: ....

1	2	3	**4***	$\sum$

Rachunek prawdopodobieństwa dla informatyków

Kolokwium 3 (14.01.2010)

1. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, przy czym $\mathbb{E}X^2 = 5$ oraz $\mathbf{P}(X > 1) = 1/2$. Wyznaczyć parametry m i σ, a następnie (korzystając z tablic) obliczyć $\mathbf{P}(|X| < 1)$.

Zmienną losową X zapisujemy jako $X = \sigma N + m$, gdzie N jest zmienną losową o standardowym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0,1)$. Rozkład normalny jest symetryczny względem średniej, tzn. $\mathbf{P}(X > m) = \mathbf{P}(X < m) = 1/2$, zatem $m = 1$, a stąd $\sigma^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = 5 - m^2 = 4$, czyli $\sigma = 2$. Następnie:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(|X| < 1) &= \mathbf{P}(-1 < X < 1) = \mathbf{P}(-2 < \sigma N < 0) = \mathbf{P}(-1 < N < 0) \\
&= \mathbf{P}(0 < N < 1) = \Phi(1) - \Phi(0) \approx 0.8413 - 1/2 = 0.3413 .
\end{aligned}$$

Imię i nazwisko: ....

2. Funkcja tworząca momenty dla zmiennej losowej X o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ma postać:

$$M_X(t) \;=\; \exp\left(tm + \frac{t^2}{2}\sigma^2\right) \;.$$

Korzystając z tego faktu, udowodnić, że jeśli X_1 i X_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ i $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ odpowiednio, to $X_1 + X_2$ ma również rozkład normalny i podać jego parametry.

Policzymy funkcję tworzącą momenty dla zmiennej losowej $X_1 + X_2$:

$$\begin{aligned}
M_{X_1+X_2}(t) &= \mathbb{E}\, e^{t(X_1+X_2)} \;=\; \mathbb{E}\, e^{tX_1}\, e^{tX_2} \;\overset{(*)}{=}\; \mathbb{E}\, e^{tX_1}\, \mathbb{E}\, e^{tX_2} \\
&= \exp\left(tm_1 + \frac{t^2}{2}\sigma_1^2\right) \exp\left(tm_2 + \frac{t^2}{2}\sigma_2^2\right) \;=\; \exp\left(t(m_1+m_2) + \frac{t^2}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\right) \;,
\end{aligned}$$

co jest funkcją tworzącą momenty dla zmiennej losowej o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$. W $(*)$ skorzystaliśmy z niezależności zmiennych losowych X_1 i X_2.

Imię i nazwisko: ....

3. Niech $X_0, X_1, \ldots, X_7$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie dwumianowym $b(1,p)$ (tzn. $p = \mathbf{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_i = 0)$ dla każdego $i \in \{0,1,\ldots,7\}$). $(X_0, X_1, \ldots, X_7)$ traktujemy jako cyfry w zapisie binarnym liczby ze zbioru $\{0,1,\ldots,255\}$, będącej wartością zmiennej losowej X, tzn.

$$X = \sum_{i=0}^{7} 2^i X_i .$$

Obliczyć:

a) (6 punktów) $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{V}\mathrm{ar}X$;

Wskazówka: $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) (4 punkty) $\mathbf{P}(X \in \{1,2,4,8,16,32,64,128\})$.

a) Mamy $\mathbb{E}X_i = p$ oraz $\mathbb{V}\mathrm{ar}X_i = p(1-p)$ dla każdego $i \in \{0,1,\ldots,7\}$. Obliczamy:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{7} 2^i X_i\right) = \sum_{i=0}^{7} \mathbb{E}(2^i X_i) = \sum_{i=0}^{7} 2^i\, \mathbb{E}X_i \\
&= \mathbb{E}X_0 \sum_{i=0}^{7} 2^i = (2^8 - 1)p = 255p ; \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}X &= \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\sum_{i=0}^{7} 2^i X_i\right) \overset{(*)}{=} \sum_{i=0}^{7} \mathbb{V}\mathrm{ar}(2^i X_i) = \sum_{i=0}^{7} (2^i)^2\, \mathbb{V}\mathrm{ar}X_i \\
&= \mathbb{V}\mathrm{ar}X_0 \sum_{i=0}^{7} 4^i = \frac{p(1-p)(4^8-1)}{4-1} = \frac{p(1-p)(2^{16}-1)}{3} .
\end{aligned}$$

W $(*)$ skorzystaliśmy z niezależności zmiennych losowych $X_0, X_1, \ldots, X_7$.

b) $X \in \{1,2,4,8,16,32,64,128\}$ oznacza, że w zapisie binarnym liczby X występuje tylko jedna cyfra 1, a pozostałe siedem cyfr to 0. Zatem $\mathbf{P}(X \in \{1,2,4,8,16,32,64,128\})$ to prawdopodobieństwo zajścia jednego sukcesu spośród ośmiu prób Bernoulliego, czyli

$$\mathbf{P}(X \in \{1,2,4,8,16,32,64,128\}) = \binom{8}{1} p^1 (1-p)^{8-1} = 8p(1-p)^7 .$$

Imię i nazwisko: ....

4*. a) (3 punkty) Znaleźć funkcję tworzącą momenty dla zmiennej losowej X o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}[0,\alpha]$ z gęstością postaci

$$f_X(x) \;=\; \frac{1}{\alpha}\,\mathbb{1}_{[0,\alpha]}(x)\;.$$

b) (2 punkty) Znaleźć funkcję tworzącą momenty dla zmiennej losowej Y o rozkładzie dwumianowym $b(1,p)$ (tzn. $p = \mathbf{P}(Y=1) = 1-\mathbf{P}(Y=0)$).

c) (5 punktów) Niech zmienna losowa X_1 ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}[0,1]$. Korzystając z podpunktów a) i b), znaleźć rozkład zmiennej losowej Z niezależnej od X_1 takiej, że $X_2 = Z + X_1$ ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}[0,2]$.

a)

$$M_X(t) \;=\; \mathbb{E}\,e^{tX} \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)dx \;=\; \int_0^{\alpha} \frac{1}{\alpha}\,e^{tx}dx \;=\; \left.\frac{e^{tx}}{\alpha t}\right|_0^{\alpha} \;=\; \frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha t}\;.$$

b)

$$M_Y(t) \;=\; \mathbb{E}\,e^{tY} \;=\; e^{t\cdot 0}\,\mathbf{P}(Y=0) \;+\; e^{t\cdot 1}\,\mathbf{P}(Y=1) \;=\; pe^t \;+\; 1-p\;.$$

c) Zmienne losowe Z i X_1 są niezależne, zatem $M_{X_2}(t) \;=\; M_{Z+X_1}(t) \;=\; M_Z(t)\,M_{X_1}(t)$, a stąd

$$M_Z(t) \;=\; \frac{M_{X_2}(t)}{M_{X_1}(t)} \;=\; \frac{\frac{e^{2t}-1}{2t}}{\frac{e^t-1}{t}} \;=\; \frac{e^t+1}{2} \;=\; \frac{1}{2}\,e^t \;+\; \frac{1}{2}\;,$$

co jest funkcją tworzącą momenty dla zmiennej losowej o rozkładzie dwumianowym $b(1,1/2)$.