Imię i nazwisko: ....

1	2	3	**4***	$\sum$

Rachunek prawdopodobieństwa dla informatyków

Kolokwium 3 (14.01.2010)

1. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, przy czym $\mathbb{E}X^2 = 5$ oraz $\mathbf{P}(X > 1) = 1/2$. Wyznaczyć parametry m i σ, a następnie (korzystając z tablic) obliczyć $\mathbf{P}(|X| < 1)$.

Imię i nazwisko: ....

2. Funkcja tworząca momenty dla zmiennej losowej X o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ma postać:

$$M_X(t) \; = \; \exp\left(tm + \frac{t^2}{2}\sigma^2\right) \; .$$

Korzystając z tego faktu, udowodnić, że jeśli X_1 i X_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ i $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ odpowiednio, to $X_1 + X_2$ ma również rozkład normalny i podać jego parametry.

Imię i nazwisko: ....

3. Niech $X_0, X_1, \ldots, X_7$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie dwumianowym $b(1, p)$ (tzn. $p = \mathbf{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_i = 0)$ dla każdego $i \in \{0, 1, \ldots, 7\}$).
$(X_0, X_1, \ldots, X_7)$ traktujemy jako cyfry w zapisie binarnym liczby ze zbioru $\{0, 1, \ldots, 255\}$, będącej wartością zmiennej losowej X, tzn.

$$X = \sum_{i=0}^{7} 2^i X_i .$$

Obliczyć:

a) (6 punktów) $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{V}\mathrm{ar}X$;

Wskazówka: $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

b) (4 punkty) $\mathbf{P}(X \in \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128\})$.

Imię i nazwisko: ....

4*. a) (3 punkty) Znaleźć funkcję tworzącą momenty dla zmiennej losowej X o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}[0,\alpha]$ z gęstością postaci

$$f_X(x) \;=\; \frac{1}{\alpha}\,\mathbb{1}_{[0,\alpha]}(x)\ .$$

b) (2 punkty) Znaleźć funkcję tworzącą momenty dla zmiennej losowej Y o rozkładzie dwumianowym $b(1,p)$ (tzn. $p = \mathbf{P}(Y=1) = 1 - \mathbf{P}(Y=0)$).

c) (5 punktów) Niech zmienna losowa X_1 ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}[0,1]$. Korzystając z podpunktów a) i b), znaleźć rozkład zmiennej losowej Z niezależnej od X_1 takiej, że $X_2 = Z + X_1$ ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}[0,2]$.