

Imię i nazwisko:

1	2	3	Σ

Rachunek prawdopodobieństwa dla informatyków
Kolokwium 2 (3.12.2009)

1. Rozkład wektora losowego (X, Y) przedstawia tabela:

$X \setminus Y$	-1	0	1
0	0	$3/18$	c
1	$5/18$	b	$5/18$
2	a	$3/18$	0

Rozkład zmiennej losowej Y jest *równomierny* na $\{-1, 0, 1\}$, tzn. $\mathbf{P}(Y = i) = \mathbf{P}(Y = j)$ dla każdego $i, j \in \{-1, 0, 1\}$.

Wyznaczyć liczby a, b i c oraz rozkłady brzegowe. Obliczyć $\mathbb{E}X, \mathbb{E}Y, \mathbb{V}\text{ar}X, \mathbb{V}\text{ar}Y, \mathbb{C}\text{ov}(X, Y)$ oraz $\mathbb{V}\text{ar}(X + Y)$. Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?

Skoro rozkład zmiennej losowej Y jest *równomierny* na $\{-1, 0, 1\}$, zatem $\mathbf{P}(Y = -1) = 5/18 + a = \mathbf{P}(Y = 0) = 6/18 + b = \mathbf{P}(Y = 1) = 5/18 + c = 1/3$, stąd $a = c = 1/18$ oraz $b = 0$. Rozkład brzegowy zmiennej losowej X ma postać: $\mathbf{P}(X = 0) = 3/18 + c = 4/18 = 3/18 + a = \mathbf{P}(X = 2)$ oraz $\mathbf{P}(X = 1) = 10/18 + b = 10/18$. Następnie:

$$\mathbb{E}X = \frac{1 \cdot 10 + 2 \cdot 4}{18} = 1;$$

$$\mathbb{E}Y = 0 \quad (\text{bo rozkład zmiennej losowej } Y \text{ jest symetryczny względem } 0);$$

$$\mathbb{V}\text{ar}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{1 \cdot 10 + 2^2 \cdot 4}{18} - 1 = \frac{8}{18};$$

$$\mathbb{V}\text{ar}Y = \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{2}{3};$$

$$\mathbb{C}\text{ov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y) = \frac{1 \cdot 5 - 1 \cdot 5 - 2 \cdot 1}{18} - 0 = -\frac{2}{18};$$

$$\mathbb{V}\text{ar}(X + Y) = \mathbb{V}\text{ar}(X) + \mathbb{V}\text{ar}(Y) + 2 \cdot \mathbb{C}\text{ov}(X, Y) = \frac{8}{18} + \frac{12}{18} - \frac{4}{18} = \frac{16}{18}.$$

Zmienne losowe X i Y nie są niezależne chociażby dlatego, że $\mathbb{C}\text{ov}(X, Y) \neq 0$.

Imię i nazwisko:

2. Niech X będzie zmienną losową z rozkładu o gęstości postaci

$$f_X(t) = \frac{1}{t^2} \mathbb{1}_{(1,\infty)}(t).$$

Wyznaczyć rozkład (dystrybuantę lub gęstość) zmiennej losowej $Y = \frac{1}{X}$. Co to za rozkład? Znaleźć $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$ i porównać z $\frac{1}{\mathbb{E}X}$ (o ile to możliwe).

Zmienna losowa X przyjmuje wartości z przedziału $(1, \infty)$, zatem $Y = 1/X$ przyjmuje wartości z przedziału $(0, 1)$. Dystrybuanty zmiennych losowych X i Y mają postać:

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_1^x t^{-2} dt = -t^{-1} \Big|_1^x = 1 - \frac{1}{x} \quad \text{dla } x \in (1, \infty);$$

$$\mathbf{P}(Y \leq x) = \mathbf{P}(1/X \leq x) = \mathbf{P}(X \geq 1/x) = 1 - \mathbf{P}(X \leq 1/x) = 1 - \left(1 - \frac{1}{1/x}\right) = x \quad \text{dla } x \in (0, 1).$$

Rozkładem zmiennej losowej Y jest więc rozkład jednostajny na odcinku $(0, 1)$, zatem $\mathbb{E}Y = 1/2$. Można też inaczej policzyć $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}(1/X)$ korzystając z następującego wzoru dla funkcji $g(x) = 1/x$:

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f_X(t) dt = \int_1^{\infty} \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t^2} dt = \int_1^{\infty} t^{-3} dt = -\frac{t^{-2}}{2} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{2}.$$

Natomiast

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t) dt = \int_1^{\infty} \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^{\infty} = \infty.$$

W szczególności jest to przykład na to, że $\mathbb{E}(1/X) \neq 1/\mathbb{E}X$.

Imię i nazwisko:

3. W urnie znajduje się 10 kul białych i 10 kul czarnych. Losujemy bez zwracania 10 kul. Niech:

X będzie zmienną losową opisującą liczbę wylosowanych kul białych;

Y będzie zmienną losową opisującą liczbę wylosowanych kul czarnych.

Wyznaczyć rozkład ($\mathbf{P}(X = k)$ dla $k \in \{0, 1, \dots, 10\}$) zmiennej losowej X . Jaki jest rozkład zmiennej losowej Y w porównaniu do X ? Obliczyć $\mathbb{E}X$.

Wskazówka: W celu znalezienia $\mathbb{E}X$ można np. rozważyć sumę $X + Y$ i skorzystać ze wzoru $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$.

Szukamy $\mathbf{P}(X = k)$ dla $k \in \{0, 1, \dots, 10\}$, czyli prawdopodobieństwa, że wśród 10 wylosowanych kul z 20 będzie k kul danego koloru. Losujemy bez zwracania 10 kul spośród 20, zatem przestrzenią zdarzeń elementarnych jest zbiór wszystkich podzbiorów 10 elementowych ze zbioru 20 elementowego, a więc $|\Omega| = \binom{20}{10}$. Podzbiorów wśród których jest k kul danego koloru i $10 - k$ innego koloru jest $\binom{10}{k} \cdot \binom{10}{10-k}$. Zatem rozkład zmiennej losowej X i Y jest taki sam i wynosi:

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(Y = k) = \frac{\binom{10}{k} \cdot \binom{10}{10-k}}{\binom{20}{10}} = \frac{\binom{10}{k}^2}{\binom{20}{10}} \quad \text{dla } k \in \{0, 1, \dots, 10\}.$$

W celu wyznaczenia $\mathbb{E}X$ można zauważyć, że rozkład zmiennej losowej X jest symetryczny względem 5, a więc $\mathbb{E}X = 5$. Alternatywnie korzystając ze wskazówki mamy, że

$$10 = X + Y = \mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y = 2 \cdot \mathbb{E}X,$$

a stąd również $\mathbb{E}X = 5$.

Uwaga: Z tego zadania wychodzi ładny kombinatoryczny dowód faktu, że

$$\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}} = 1 \quad \text{a więc} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

