Jakub „TheCat” Kowalski

Rachunek prawdopodobienstwa dla informatyków 2009

Rozwiązania zadań z

Kolokwium 1 (5.11.2009)

Zadanie 1.

Co jest bardziej prawdopodobne: otrzymanie sumy oczek 11 przy rzucie czterema kostkami (sześciościennymi), czy co najmniej raz sumy oczek 11 przy dwóch niezależnych rzutach dwoma kostkami?
W rozwiązaniu należy opisać odpowiednie przestrzenie probabilistyczne i zdarzenia.

Rozwiązanie.

Oznaczmy jako $\mathbb{D} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ zbiór oznaczający wyniki rzutu kością. Niech $\Omega_a = \mathbb{D}^4$, a więc pojedyncze zdarzenie odpowiada rzutowi czterema kostkami. Wydarzeniu „suma oczek przy rzucie czterema kostkami wynosi 11” odpowiada zbiór

$$\mathcal{A} = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{D}^4 \mid a + b + c + d = 11\}.$$

Zauważmy, że liczba zdarzeń spełniających $\mathcal{A}$ jest taka sama jak liczba zdarzeń spełniających

$$\mathcal{Z} = \{(a, b, c, d) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}^4 \mid a + b + c + d = 7\}.$$

Interpretacja $|\mathcal{Z}|$ jest taka, że jest to ilość sposobów na jakie można rodzielić trzema kreskami 7 kropek (a więc odpowiada wyborowi trójelementowych podzbiorów z 10-elelemntowego zbioru), pomniejszona o niepoprawne podziały. Niepoprawne podziały to takie w których jeden ze zbiorów ma liczność równą co najmniej sześć. Takich podziałów jest k, gdzie

$$k = 4 \cdot 3 + 4 = 16,$$

ponieważ możemy na 4 sposoby wybrać zbiór wielkości sześć, a potem na 3 sposoby gdzie wstawić pozostałe oczko, lub też wybrać z czterech zbiorów ten, który będzie miał wielkość siedem.
Możemy teraz obliczyć wielkość zbioru $\mathcal{Z}$:

$$|\mathcal{Z}| = \binom{10}{3} - k = 120 - 16 = 104$$

Skoro zbiory $\mathcal{A}$ i $\mathcal{Z}$ są równoliczne, możemy powiedzieć, że

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \frac{|\mathcal{Z}|}{|\Omega_a|} = \frac{104}{6^4} = \frac{13}{162}$$

Czas na część drugą. Niech $\Omega_b = \mathbb{D}^2$, zaś pojedyncze zdarzenie oznacza wynik rzutu dwiema kostkami. Wtedy wydarzeniu „na dwóch kostach wypadło w sumie 11 oczek” odpowiada zbiór

$$\mathcal{C} = \{(a, b) \in \mathbb{D}^2 \mid a + b = 11\}.$$

Można zauważyć, że $\mathcal{C} = \{(5,6),(6,5)\}$. W takim razie mamy

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}) = \frac{|\mathcal{C}|}{|\Omega_b|} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Wypadnięcie co najmniej raz sumy oczek 11 przy dwóch niezależnych rzutach dwoma kostkami, odpowiada natomiast wydarzeniu

$$\mathcal{B} = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{D}^4 \mid a+b = 11 \vee c+d = 11\}.$$

Tak więc

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}) = 2\mathbb{P}(\mathcal{C})(1-\mathbb{P}(\mathcal{C})) + \mathbb{P}(\mathcal{C})^2.$$

Znając już prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia $\mathcal{C}$, możemy obliczyć $\mathbb{P}(\mathcal{B})$.

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}) = 2\frac{1}{18} \cdot \frac{17}{18} + \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{18} = \frac{34}{324} + \frac{1}{324} = \frac{35}{324}$$

Pozostało porównać oba wyliczone prawdopodobieństwa. Mamy

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \frac{13}{162} = \frac{104}{1296} < \frac{140}{1296} = \frac{35}{324} = \mathbb{P}(\mathcal{B})$$

Tak więc szansa, że uda się co najmniej raz wyrzucić 11 rzucając dwa razy dwoma kostkami, jest większa.

Zadanie 2.

Owad składa k ($k \geqslant 0$) jajeczek z prawdopodobieństwem $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$. Potomek wylęga się z jaja z prawdopodobienstwem p, niezależnie od innych. Znaleźć prawdopodobieństwo, że liczba potomków bedzie równa l ($l \geqslant 0$).
Wskazówka: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie.

Niech $\Omega = \mathbb{N}^2$, wtedy semantyka pojedynczego zdarzenia $\omega = (a,b)$ jest taka, że owad złożył a jajeczek i wykluło się z nich b potomków.
Wtedy

$$\mathcal{A} = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid b = l\}$$

będzie wydarzeniem z treści zadania którego prawdopodobieństwo mamy wyliczyć.
Niech

$$\mathcal{B}_k = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a = k\}.$$

Ponieważ mamy $\forall i,j \in \mathbb{N}.\ \mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$ i $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_i = \Omega$, rodzina zdarzeń $\{\mathcal{B}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ jest rozbiciem przestrzeni Ω. Oznacza to, że, zgodnie ze wzorem na prawdopodobieństwa całkowite:

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\mathcal{A} \mid \mathcal{B}_k)\mathbb{P}(\mathcal{B}_k).$$

Z treści zadania wiemy, że $\mathbb{P}(\mathcal{B}_k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.
Natomiast wystąpienie zdarzenia $\mathcal{A}$ pod warunkiem zdarzenia $\mathcal{B}_k$, to nic innego jak szansa

na uzyskanie l sukcesów spośród k prób, przy czym prawdopodobieństwo sukcesu wynosi p. Zgodnie ze schematem Bernoulliego, wyliczamy więc, że

$$\mathbb{P}(\mathcal{A} \mid \mathcal{B}_k) = \binom{k}{l} p^l (1-p)^{k-l}.$$

Podstawiając do wzoru na prawdopodobieństwo $\mathcal{A}$ otrzymujemy

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \binom{k}{l} p^l (1-p)^{k-l}.$$

Uprościmy teraz to wyrażenie korzystając między innymi ze wskazówki.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \binom{k}{l} p^l (1-p)^{k-l} = \frac{p^l}{e^\lambda} \sum_{k=l}^{\infty} \frac{\lambda^{k-l}\lambda^l}{k!} \frac{k!}{l!(k-l)!} (1-p)^{k-l} = \frac{p^l \lambda^l}{e^\lambda l!} \sum_{k-l=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{k-l}}{(k-l)!}$$

$$= \frac{p^l \lambda^l}{e^\lambda l!} e^{\lambda(1-p)} = \frac{p^l \lambda^l}{e^\lambda l!} \frac{e^\lambda}{e^{\lambda p}} = \frac{p^l \lambda^l}{l! e^{\lambda p}}$$

Zadanie 3.

Z odcinka $[-1, 1]$ wybrano losowo punkty a i b. Niech funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem

$$f(x) = (a+1)x^2 + 2bx + 1.$$

Obliczyć prawdopodobieństwo, że

a) $f(x) > a$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$;

b) suma rozwiazań równania $f(x) = 0$ jest dodatnia, jeśli wiadomo, ze równanie to ma dwa różne rozwiązania.

Rozwiązanie.

Niech $\Omega = [-1, 1]^2$, zaś zbiór

$$\mathcal{A} = \{(a, b) \in \Omega \mid \forall x \in \mathbb{R}.\ f(x) - a > 0\}$$

odpowiada wydarzeniu opisanemu w pierwszym podpunkcie.
Ponieważ współczynnik przy wyrazie x^2 jest nieujemny, prawdopodobieństwo wydarzenia $\mathcal{A}$ odpowiada sytuacji w której wyróżnik funkcji $f(x) - a$ jest mniejszy od zera.

$$\Delta_a = (2b)^2 - 4(1-a)(a+1) = 4b^2 + 4a^2 - 4$$

$$4b^2 + 4a^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow b^2 + a^2 < 1$$

Tak więc geometryczna interpretacja wydarzenia $\mathcal{A}$ to koło o promieniu 1 i środku w punkcie $(0, 0)$. Wnioskujemy z tego, że

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \frac{\pi 1^2}{2^2} = \frac{\pi}{4}$$

Wydarzeniu opisanemu w drugim podpunkcie zadania niech odpowiada

$$\mathcal{B} = \{(a,b) \in [-1,1]^2 \mid \exists x_1, x_2.\ x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = 0 = f(x_2) \wedge x_1 + x_2 > 0\}.$$

Najpierw obliczymy kiedy funkcja f ma dwa pierwiastki, a więc kiedy jej wyróżnik jest większy od zera.

$$\Delta_b = (2b)^2 - 4(a+1) = 4b^2 - 4a - 4$$

$$4b^2 - 4a - 4 > 0 \Leftrightarrow b^2 > a + 1 \Leftrightarrow |b| > \sqrt{a+1}$$

Zgodnie ze wzorem Viète'a suma pierwiastów funkcji f wyraża się następująco:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2b}{a+1}.$$

Zauważmy, że powyższe wyrażenie przyjmuje wartość dodatnią jedynie gdy b jest ujemne, a więc w połowie przypadków spełniających nierówność $\Delta_b > 0$. Wnioskiem z tej obserwacji jest

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}) = \frac{1}{2}.$$