Rachunek prawdopodobieństwa dla informatyków – lista 6

1. (10p) Załóżmy, że rzucamy 2 idealnymi kośćmi do gry. Niech X_1,X_2 oznaczają odpowiednio ilości wyrzuconych oczek na kościach 1,2 oraz $X=X_1+X_2$. Wyznaczyć
   a) $E[X|X_1$ jest nieparzyste$]$
   b)$E[X_1|X=9]$
   c) $E[X_1-X_2|X=2]$.
2. (5p) Przesyłamy przez sieć n-węzłową 1 bit. Na każdym węźle może dojść do przekłamania i zmiany informacji z prawdopodobieństwem 1/2. Jaka jest szansa, że informacja na wyjściu nie będzie odpowiadać informacji na wejściu?
3. (10p) Wyciągamy karty z talii wielkości n w sposób losowy ze zwracaniem. Jaka jest spodziewana liczba kart, którą musimy wyciągnąć aby zobaczyć wszystkie n kart?
4. (10p) Niech $X_1,...,X_n$ będzie ciągiem wzajemnie niezależnych zmiennych losowych przyjmujących wartość 1 z prawdopodobieństwem p lub 0 z prawdopodobieństwem 1-p. Serią nazywamy maksymalnej długości podciąg składający się z 1. Np. w ciągu 1,0,1,1,1,0,0,1,1,0 mamy 3 serie. Niech R oznacza ilość serii. Znaleźć E[R] oraz Var[R]. Wsk. : przedstawić R w postaci sumy.
5. (10p) Górnik jest zamknięty w jaskini z której są 3 wyjścia. Wyjście 1 prowadzi tunelem z powrotem do jaskini po 4 dniach. Wyjście 2 prowadzi z powrotem do jaskini po 7 dniach. Wyjście 3 prowadzi na wolność po 3 dniach. Załóżmy, że górnik nie rozpoznaje tego, czy powraca do jaskini w której już był i za każdym razem z jednakowym prawdopodobieństwem wybiera jedno z 3 wyjść. Znaleźć średni czas tułaczki po labiryncie.
6. (10p) Na końcowym egzaminie z rachunku prawdopodobieństwa student może otrzymać maksymalnie 100 pkt. Średnia ilość punktów uzyskana przez 800 studentów wynosi 72,5, a odchylenie standardowe 8.2. Stosując nierówność Czebyszewa, podaj co najmniej ilu studentów musiało otrzymać pomiędzy 55 i 90 pkt.
7. (10p) Oszacuj prawdopodobieństwo wyrzucenia pomiędzy 400 a 500 orłów na 900 rzutów idealną monetą.
8. (10p) Prawdopodobieństwo poprawnego przesłania pakietu danych wynosi 0.6. Niezależnie przesyłamy n pakietów. Cała transmisja kończy się sukcesem jeśli uda się przesłać poprawnie co najmniej połowę pakietów. Korzystając z nierówności Chernoffa znaleźć oszacowanie prawdopodobieństwa sukcesu.
9. (10p) Niech X będzie krotnością wystąpienia „6" w n rzutach idealną kością do gry. Porównaj oszacowania na $P(X \geq n/4)$ przy użyciu nierówności Markowa, Czebyszewa i Chernoffa.
10. (5p) Wyznaczyć funkcję tworzącą momenty dla zmiennej losowej B(n,p). Niech $X \sim B(n,p)$, $Y \sim B(m,p)$ będą niezależnymi zmiennymi losowym. Korzystając z funkcji tworzących momenty, znaleźć rozkład X+Y.
11. (10p) Wyznacz prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej 55 orłów w 100 rzutach monetą i porównaj z oszacowaniem Chernoffa. To samo dla 550 orłów w 1000 rzutach (jeśli jest taka potrzeba, to można posiłkować się komputerem).
12. (5p) Niech $X \sim N(0,1)$. Znaleźć $E(X^k)$ dla k=1,2,...