Rachunek prawdopodobieństwa dla informatyków – lista 1

1. (10p) Wykazać za pomocą indukcji prawdziwość zasady włączeń i wyłączeń.
2. (10p) Wybieramy „losowo” liczbę naturalną z przedziału [1,1000000]. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że wybrana liczba jest podzielna przez co najmniej jedną z liczb 4,6,9.
3. (5p) Dane są $P(A')=1/3$, $P(A\cap B)=1/4$, $P(A\cup B)=2/3$. Obliczyć $P(B')$, $P(A\cap B')$, $P(B\setminus A)$.
4. (5p) Niech $A\cup B\cup C=\Omega$, $P(B)=2P(A)$, $P(C)=3P(A)$, $P(A\cap B)=P(A\cap C)=P(B\cap C)$. Pokazać, że $1/6\leq P(A)\leq 1/4$.
5. (5p) Przy przekazywaniu wiadomości za pomocą telegrafu Morse`a każdą literę przedstawia się za pomocą ciągu kropkowo-kreskowego. Jeśli alfabet składa się z r liter, to jaka powinna być długość najdłuższej litery?
6. (5p) Cylindryczny zamek cyfrowy ma 4 współosiowe pierścienie. Na każdym z nich znajduje się po sześć cyfr. Ile jest możliwości ustawienia zamka?
7. (5p) Niech pewna liczba będzie iloczynem pięciu liczb pierwszych. Iloma sposobami można tę liczbę przedstawić jako iloczyn, jeśli nie bierzemy pod uwagę kolejności?
8. (10p) Towarzystwo składa się z n pań i n panów. Tworzymy zespół par z tego towarzystwa. Nie jest konieczne, aby w skład zespołu wchodziły wszystkie panie i wszyscy panowie. Ile jest sposobów utworzenia takiego zespołu?
9. (5p) Parking samochodowy posiada 12 miejsc ustawionych w jednym rzędzie. 8 aut zaparkowało na nim tak, że pozostały 4 wolne miejsca jedno obok drugiego. Czy uporządkowanie to jest przypadkowe? (obliczyć prawdopodobieństwo).
10. (10p) Załóżmy, że każda z n pałek została złamana na dwie części - długą i krótką. 2n części połączono w n par, z których utworzono nowe pałki. Znaleźć prawdopodobieństwo, że
    a. części zostaną połączone w takich samych kombinacjach jak przed złamaniem;
    b. wszystkie długie części zostaną połączone z krótkimi.
11. (5p) Jeżeli n ludzi, wśród których są A i B, ustawia się w szereg, to jakie jest prawdopodobieństwo, że pomiędzy nimi będzie dokładnie r ludzi. Pokazać, że jeśli stoją w pierścieniu, to prawdopodobieństwo nie zależy od r, czyli wynosi ono 1/(n-1).
12. (10p) Grupa składająca się z 2N chłopców i 2N dziewcząt została podzielona na dwie równe grupy. Znaleźć prawdopodobieństwo, że każda z tych podgrup składa się z takiej samej ilości chłopców i dziewcząt. Ocenić to prawdopodobieństwo za pomocą wzoru Stirlinga.
13. (10p) Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy grze w brydża N i S mają razem dokładnie 1,2,3,4 asy.
14. (5p) Ile wyników można rozróżnić, jeśli rzuca się r_1 kości do gry wraz z r_2 monetami.
15. (5p) Na ile różnych rozróżnialnych sposobów można ustawić r_1 białych kul, r_2 czarnych i r_3 czerwonych.
16. (10p) Znaleźć prawdopodobieństwo, że w losowym uporządkowaniu 52 kart żadne dwa asy nie są obok siebie.