Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 8.

1. Niech X, Y, Z będą niezależnymi zmiennymi o rozkładzie $U[0,1]$. Sprawdzić, że $P(X \geqslant YZ) = 0.75$.
2. Rozkład Rayleigha określony jest przez gęstość $f(x) = \dfrac{x}{\sigma^2} \exp\left\{-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right\}$. Sprawdzić, że $EX = \sigma\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, $D^2(X) = \dfrac{4-\pi}{2}\,\sigma^2$.
3. Niech (X, Y) oznacza wybrany losowo punkt na płaszczyźnie. Załóżmy, że współrzędne X i Y są niezależne i podlegają rozkładowi $N(0,1)$. Od zmiennej (X, Y) przechodzimy do zmiennej (R, Θ), gdzie R i Θ są współrzędnymi biegunowymi punktu (X, Y). Wykazać, że gęstość zmiennej (R, Θ) określona jest wzorem $g(r, \Theta) = \dfrac{1}{2\pi} r \cdot \exp\left\{-\dfrac{r^2}{2}\right\}$, gdzie $0 < \Theta < 2\pi$, $0 < r < \infty$.
4. Znaczenie zmiennej (X, Y) niech będzie takie, jak w poprzednim zadaniu. Niech $D = R^2 = X^2 + Y^2$, $\Theta = \tan^{-1} \dfrac{Y}{X}$. Wykazać, że zmienna (D, Θ) ma gęstość określoną wzorem $f(d, \Theta) = \dfrac{1}{2} \exp\left\{-\dfrac{d}{2}\right\} \dfrac{1}{2\pi}$, gdzie $0 < d < \infty$, $0 < \Theta < 2\pi$. Sprawdzić, czy zmienne D i Θ są niezależne. Jaki rozkład ma zmienna D?
5. Załóżmy, ze niezależne zmienne losowe X, Y mają rozkłady, odpowiednio, $Gamma(b, p)$ i $Gamma(b, q)$. Niech $U = X + Y$ oraz $V = \dfrac{X}{X+Y}$. Wykazać, że
   (a) Zmienne U i V są niezależne.
   (b) $X + Y$ ma rozkład $Gamma(b, p + q)$.
   (c) Zmienna V ma rozkład $Beta(p, q)$.
6. Niech zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależne i niech mają ten sam rozkład $Exp(\lambda)$. Niech $Y_i = X_1 + \ldots + X_i$, dla $i = 1, \ldots, n$. Wykazać, że dla gęstości zmiennej $(Y_1, \ldots, Y_n)$ zachodzi wzór $f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n) = \lambda^n \exp(-\lambda y_n)$, gdzie $0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n$.
7. Dla gęstości $f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n)$ z poprzedniego zadania wykazać, że gęstość brzegowa względem zmiennej Y_n wyraża się wzorem $f_{Y_n}(y_n) = \lambda^n \dfrac{y_n^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda y_n)$, gdzie $0 < y_n$.
8. Na prostej losujemy trzy punkty (zmienne) X_1, X_2, X_3. Jakie jest ppb, że punkt X_2 znajdzie się pmiędzy punktami X_1 i X_3?

Witold Karczewski