Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 7.

1. Obliczyć pierwszy moment zwykły, drugi moment zwykły, wariancję rozkładu Poissona. $M(t) = \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right]$.
2. Wyznaczyć wartość oczekiwaną oraz wariancję rozkładu normalnego. $M(t) = \exp\left[\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right]$.
3. Jeżeli niezależne zmienne losowe X_k mają rozkład Poissona z parametrami λ_k, to $Y = \sum X_k$ podlega rozkładowi Poissona z parametrem $\lambda = \sum \lambda_k$.
4. Jeżeli niezależne zmienne losowe X_k mają rozkład normalny $N(\mu_k, \sigma_k^2)$, to $Y = \sum X_k$ podlega rozkładowi normalnemu $N\left(\sum \mu_k, \sum \sigma_k^2\right)$.
5. Jeżeli niezależne zmienne losowe X_k mają rozkład Bernoulliego z parametrami (n_k, p) to zmienna $Y = \sum X_k$ ma rozkład Bernoulliego z parametrami $\left(\sum n_k, p\right)$.
6. Wykazać, że jeżeli zmienne losowe X_k są niezależne i podlegają rozkładowi normalnemu $N(0, \sigma^2)$, to zmienna losowa $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k^2$ podlega rozkładowi gamma z parametrami $b = \frac{1}{2\sigma^2}$, $p = \frac{n}{2}$.
7. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $X = X_1 + X_2$, jeśli zmienne losowe X_1 i X_2 są niezależne, zmienna X_1 ma rozkład wykładniczy z parametrem λ ($f_1(x) = \lambda \exp[-\lambda x]$, $x > 0$), zmienna X_2 ma rozkład o gęstości $f_2(x) = \lambda \exp[\lambda x]$, dla $x < 0$.

   Niech $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$, $(p > 0, q > 0)$.

8. (a) $B(p, q) = B(q, p)$.

   (b) $B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1)$.

   Wskazówki: całkowanie przez części, $x^p(1-x)^{q-2} = x^{p-1}(1-x)^{q-2} - x^{p-1}(1-x)^{q-1}$.
9. Sprawdzić, że dla naturalnych p, q jest $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.
10. Wykazać, że $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, dla $p > 0$, $q > 0$.

    Początek dowodu: $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$, $\quad \Gamma(y) = \int_0^\infty y^{q-1}e^{-y}\,dy$, $\quad \Gamma(p)\,\Gamma(q) =$ $= \int_0^\infty \int_0^\infty x^{p-1}y^{q-1}e^{-x-y}\,dx\,dy$. Dokonujemy podstawienia $x = s(1-t)$, $y = st$. Zauważyć, że $s \geqslant 0$, $t \in [0, 1]$. Całkę podwójną zamienić na iloczyn całek.
11. Niezależne zmienne losowe X i Y podlegają rozkładowi gamma z parametrami (b, p_1), (b, p_2). Wykazać, że zmienna $Z = X + Y$ podlega rozkładowi gamma z parametrami $(b, p_1 + p_2)$.

Witold Karczewski