

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 6.

Zadanie 5 za 2 punkty.

1. Wyznaczyć rozkład zmiennej $Y = X^2$. Funkcja gęstości zmiennej X podana jest poniżej.

x_i	-3	-1	0	1	2	3
p_i	0.08	0.16	0.25	0.36	0.1	0.05

2. Zmienna losowa X ma rozkład $P(X = n) = 2^{-n}$, gdzie $n = 1, 2, \dots$. Znaleźć rozkład zmiennej $Y = \sin \frac{1}{2} \pi x$.
3. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{x^2}{2} \right]$. Wyznaczyć gęstość $g(y)$ zmiennej $Y = 3X + 1$.
4. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $f(x) = 3 \exp\{-3x\}$ (dla $x > 0$). Wyznaczyć gęstość zmiennej $Y = X^2$.

Rozkład Gamma(b, p) z dodatnimi, rzeczywistymi parametrami b, p ma gęstość:

$$f(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} \exp[-bx] \quad (\text{dla } x > 0).$$

5. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{x^2}{2} \right]$. Wyznaczyć gęstość $g(y)$ zmiennej $Y = X^2$.
6. Niech X, Y będą zmiennymi losowymi. Wykazać, że $|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2) \cdot E(Y^2)}$. Wskazówka: Dla $Z = (X - aY)^2$ jest $EZ \geq 0$.
7. Wykazać, że $D^2(X + a) = D^2(X)$.
8. Wykazać, że $D^2(aX) = a^2 D^2(X)$.
9. Dana jest zmienna losowa X i zmienna losowa Y określona wzorem $Y = \frac{X - EX}{\sqrt{D^2(X)}}$. Obliczyć $E(Y)$ i $D^2(Y)$.

Witold Karczewski