

# Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

## Lista zadań nr 5.

1. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład Bernoulliego  $B(n, p)$ . Udowodnić, że

$$E = \left[ \frac{1}{X+1} \right] = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

2. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład  $Poisson(\lambda)$ . Wykazać, że  $P\{X = i\}$  najpierw rośnie, a następnie maleje wraz ze zwiększaniem  $i$ . Kiedy to prawdopodobieństwo osiąga największą wartość?
3. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład  $Poisson(\lambda)$ . Wykazać że  $E[X^n] = \lambda E[(X+1)^{n-1}]$ . Z pomocą tego związku obliczyć  $E[X^3]$ .
4. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład Poissona z parametrem  $\lambda$ , gdzie  $0 < \lambda < 1$ . Znaleźć wartość  $E[X!]$ .
5.  $X$  ma rozkład geometryczny z parametrem  $p$ . Wykazać, że  $E\left[\frac{1}{X}\right] = \frac{-p \log p}{1-p}$ .

WSKAZÓWKA:  $\frac{t^i}{i} = \int_0^t x^{i-1} dx$ .

6. Niech  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx$ . Mamy  $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\} dy dx$ . Stosując podstawienie  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , wykazać, że  $I^2 = 2\pi$ .
7. Zmienna losowa  $X$  ma gęstość daną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{w.p.w.} \end{cases}$$

Znaleźć, przy założeniu  $E(X) = 0.6$  wartości  $a$  i  $b$ .

8.  $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ . Wykazać, że  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .  
WSKAZÓWKA: Podstawienie  $y = \sqrt{2x}$ .
9. Niech  $X$  będzie zmienną losową typu ciągłego o dystrybucji  $F(\cdot)$ . Wykazać, że zmienna losowa  $Y = F(X)$  ma rozkład  $U[0, 1]$ .
10. Dane są niezależne zmienne losowe  $X, Y$  o rozkładzie  $U[0, 1]$ . Niech  $x, y$  będą wylosowanymi wartościami zmiennych  $X, Y$ . Odcinek  $[0, 1]$  podzielony jest zatem na trzy części (być może jedna część ma długość 0). Jakie jest prawdopodobieństwo, że z tych trzech części można utworzyć trójkąt?
11. Jak zadanie 10, ale zmienne  $X, Y$  mają na  $[0, 1]$  gęstość  $f(t) = -6t(t-1)$ .

Witold Karczewski