Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 1.

1. Wyznaczyć dystrybuantę i obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej X o rozkładzie

x_i	2	3	4	5
p_i	0.2	0.4	0.1	0.3

2. Dystrybuanta F zmiennej losowej X określona jest następująco:

x	$(-\infty;-2]$	$(-2;3]$	$(3;5]$	$(5;\infty)$
$F(x)$	0	0.2	0.7	1

   Znaleźć funkcję prawdopodobieństwa (gęstość) i wartość oczekiwaną EX tej zmiennej.
3. Zmienna X ma rozkład Bernoulliego z parametrami n, p.
   Sprawdzić, że $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1, \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np.$
   W skrócie: zmienna X ma rozkład $B(n, p)$.

Mówimy, że zmienne X, Y są niezależne, wtedy gdy – w wypadku dyskretnym – spełniony jest warunek $P(X = x_i, Y = y_k) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_k)$.

4. Zmienna X ma rozkład $B(n_1, p)$ a zmienna Y rozkład $B(n_2, p)$.
   Zmienne są niezależne. Wykazać, że zmienna $Z = X + Y$ ma rozkład $B(n_1 + n_2, p)$.
5. Zmienna X ma rozkład Poissona z parametrem λ. Sprawdzić, że

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 1, \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda.$$

6. Niezależne zmienne losowe X, Y mają rozkład Poissona z parametrami λ_1 i λ_2. Wykazać, że zmienna $Z = X + Y$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda_1 + \lambda_2$.
7. Prawdopobieństwo sukcesu w jednej próbie jest równe p. Wykonujemy (niezależne) próby do otrzymania sukcesu. Zmienną losową X określamy jako liczbę przeprowadzonych prób. Wyznaczyć rozkład zmiennej X, tzn. podać jej funkcję prawdopodobieństwa (gęstości). Obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej X.
8. Prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie jest równe p. Wykonujemy doświadczenie do momentu uzyskania 2 sukcesów. Zmienna losowa X to liczba przeprowadzonych prób. Wyznaczyć rozkład zmiennej X, tzn. podać jej funkcję prawdopodobieństwa. Obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej X.
9. Prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie jest równe p. Powtarzamy doświadczenie aż do uzyskania sukcesu, nie więcej jednak niż $n = 4$ razy. Wyznaczyć rozkład takiej zmiennej oraz jej wartość oczekiwaną.
10. Obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej X o rozkładzie geometrycznym. $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.

Witold Karczewski