

Programowanie 2009

Egzamin zasadniczy

Szkic rozwiązania zadania 3 z części rozszerzonej

Zadanie 3. Rozważmy rachunek lambda z typami prostymi nad pojedynczym typem bazowym o :

$$\tau ::= o \mid \tau_1 \rightarrow \tau_2$$
$$\frac{}{x^\tau : \tau} \quad \frac{t_1 : \tau_2 \rightarrow \tau_1 \quad t_2 : \tau_2}{t_1 t_2 : \tau_1} \quad \frac{t : \tau_2}{\lambda x^{\tau_1}. t : \tau_1 \rightarrow \tau_2}$$

i dziedzicznie skończoną strukturę typów $\mathfrak{M}_2$ nad zbiorem dwuelementowym $\{0, 1\}$. Wskaż elementy zbioru $\llbracket (o \rightarrow o) \rightarrow o \rightarrow o \rrbracket$, które są denotacjami zamkniętych lambda wyrażeń (7 pkt.). Opisz postać zamkniętych lambda wyrażeń w postaci normalnej typu $((o \rightarrow o) \rightarrow o) \rightarrow o$ (3 pkt.).

Rozwiązanie części pierwszej. Przypomnijmy z wykładu, że dziedzicznie skończona struktura typów nad zbiorem dwuelementowym $D = \{0, 1\}$, to rodzina zbiorów indeksowana typami zadana indukcyjnie wzorami:

$$D_o = D,$$
$$D_{\tau_1 \rightarrow \tau_2} = D_{\tau_2}^{D_{\tau_1}}.$$

Interpretacja lambda wyrażeń w tej strukturze dana jest wzorami:

$$\begin{aligned} \llbracket x^\tau \rrbracket \eta &= \eta_\tau(x), \\ \llbracket t_1 t_2 \rrbracket \eta &= \llbracket t_1 \rrbracket \eta(\llbracket t_2 \rrbracket \eta), \\ \llbracket \lambda x^\tau. t \rrbracket \eta(d) &= \llbracket t \rrbracket (\eta[x \mapsto d]) \text{ dla } d \in D_\tau, \end{aligned}$$

gdzie $\eta = \{\eta_\tau\}_\tau$ jest interpretacją zmiennych wolnych ($\eta_\tau : \mathcal{X}_\tau \rightarrow D_\tau$ dla każdego typu τ). Widzimy więc, że jeżeli $t : \tau$, to $\llbracket t \rrbracket \eta \in D_\tau$.

Zbiór D_o posiada dwa elementy, zbiór $D_{o \rightarrow o}$ — cztery, zbiór $D_{(o \rightarrow o) \rightarrow (o \rightarrow o)}$ — 256. Pytamy które spośród 256 elementów tego zbioru są denotacjami zamkniętych lambda wyrażeń.

Z twierdzenia podanego na wykładzie wiemy, że powyższa semantyka denotacyjna jest adekwatna dla $\beta\eta$ -równości (ale nie jest zupełna), to znaczy, że jeżeli $t_1 =_{\beta\eta} t_2$, to $\llbracket t_1 \rrbracket \eta = \llbracket t_2 \rrbracket \eta$ (ale nie odwrotnie). Wystarczy więc rozważyć po jednym reprezentancie każdej klasy $\beta\eta$ -równości, np. rozważyć jedynie termy zamknięte w postaci $\beta\eta$ -normalnej. Wiemy (proste rozumowanie, zadanie na ćwiczeniach), że termy zamknięte w postaci $\beta\eta$ -normalnej typu $(o \rightarrow o) \rightarrow (o \rightarrow o)$, to

$$\{\lambda xy. x^{(n)}y \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\} \cup \{\lambda x. x\}.$$

Dla wygody term $\lambda x. x$ możemy zastąpić termem $\lambda xy. xy$ (który nie jest w postaci normalnej, ale należy do tej samej klasy abstrakcji, co term $\lambda x. x$). Za zbiór reprezentantów klas abstrakcji relacji $\beta\eta$ -równości możemy więc przyjąć zbiór

$$N = \{\lambda xy. x^{(n)}y \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Pytamy o obraz tego zbioru w odwzorowaniu $\llbracket \cdot \rrbracket$ (interpretację zmiennych wolnych pomijamy, bo są to termy zamknięte). Obraz dowolnego termu $t \in N$ jest funkcją $\llbracket t \rrbracket : D_{o \rightarrow o} \rightarrow D_{o \rightarrow o}$. Z definicji interpretacji termów mamy

$$\llbracket \lambda xy. x^{(n)}y \rrbracket (f) = f^{(n)} \text{ dla } f \in D_{o \rightarrow o}.$$

W zbiorze $D_{o \rightarrow o}$ mamy cztery funkcje $f : D_o \rightarrow D_o$:

$$\begin{aligned} c_0(d) &= 0 \text{ dla } d \in D_o, \\ c_1(d) &= 1 \text{ dla } d \in D_o, \\ id(d) &= d \text{ dla } d \in D_o, \\ neg(d) &= \begin{cases} 0, & \text{gd } d = 1, \\ 1, & \text{gd } d = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} c_0^{(n)} &= \begin{cases} id, & \text{dla } n = 0, \\ c_0, & \text{dla } n > 0, \end{cases} \\ c_1^{(n)} &= \begin{cases} id, & \text{dla } n = 0, \\ c_1, & \text{dla } n > 0, \end{cases} \\ id^{(n)} &= id, \text{ dla } n \in \mathbb{N}, \\ neg^{(n)} &= \begin{cases} id, & \text{dla } n \text{ parzystych}, \\ neg, & \text{dla } n \text{ nieparzystych}. \end{cases} \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \llbracket \lambda xy. x^{(0)}y \rrbracket(f) &= id, \\ \llbracket \lambda xy. x^{(2n+1)}y \rrbracket(f) &= f, \text{ dla } n \in \mathbb{N}, \\ \llbracket \lambda xy. x^{(2n+2)}y \rrbracket(f) &= \begin{cases} id, & \text{dla } f = neg, \\ f, & \text{dla } f \neq neg, \end{cases} \text{ dla } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Zatem spośród 256 elementów zbioru $D_{(o \rightarrow o) \rightarrow o \rightarrow o}$ tylko trzy: funkcja stała zwracająca identyczność, funkcja identyczności i funkcja

$$g(f) = \begin{cases} id, & \text{dla } f = neg, \\ f, & \text{dla } f \neq neg \end{cases}$$

są denotacjami zamkniętych lambda wyrażeń typu $(o \rightarrow o) \rightarrow o \rightarrow o$.

Rozwiązanie części drugiej. Pytamy o zamknięte lambda wyrażenia w postaci normalnej typu $((o \rightarrow o) \rightarrow o) \rightarrow o$. Mamy następujący fakt: jeżeli $t : o$ jest takim termem w postaci normalnej, że $FV(t) \subseteq \{f^{(o \rightarrow o) \rightarrow o}\} \cup \{x_i^o\}_{i=1}^k$, to t ma jedną z dwóch postaci:

$$x_i, \text{ gdzie } i = 1, \dots, k \text{ lub } f(\lambda x_{k+1}^o. t'),$$

gdzie t' jest takim termem typu o w postaci normalnej, że $FV(t') \subseteq \{f^{(o \rightarrow o) \rightarrow o}\} \cup \{x_i^o\}_{i=1}^{k+1}$. Ten fakt łatwo uzasadnić korzystając z lematu: każdy term w postaci normalnej można zapisać następująco:

$$\lambda y_1 \dots y_n. t_0 t_1 \dots t_m,$$

gdzie t_0 jest zmienną (jedną spośród zmiennych $x_1, \dots, x_n$ lub zmienną wolną) i termy $t_1, \dots, t_m$ też są w postaci normalnej, przy czym $n, m \geq 0$. Skoro $t : o$, to $n = 0$. Term t jest więc postaci $t_0 t_1 \dots t_m$, gdzie t_0 jest zmienną, więc $t_0 \in \{f^{(o \rightarrow o) \rightarrow o}\} \cup \{x_i^o\}_{i=1}^k$. Jeżeli t_0 jest jedną spośród zmiennych x_i^o , to $m = 0$, więc $t = x_i$. Jeżeli $t_0 = f$, to $m = 1$ i t_1 jest termem typu $o \rightarrow o$ w postaci normalnej. Stosując lemat do tego termu widzimy, że $t_1 = \lambda x_{k+1}^o. t'$ i że t' spełnia warunki podane w fakcie.

Z powyższego faktu wynika wniosek: wszystkie termy w postaci normalnej typu o takie, że zbiór ich zmiennych wolnych zawiera co najwyżej zmienną $f : (o \rightarrow o) \rightarrow o$ są postaci

$$f(\lambda x_1^o. f(\lambda x_2^o. f(\dots \lambda x_k^o. x_i \dots))),$$

dla $k \geq 1$ i $i = 1, \dots, k$. Stosując po raz trzeci wspomniany lemat, tym razem do termu zamkniętego w postaci normalnej typu $((o \rightarrow o) \rightarrow o) \rightarrow o$, otrzymujemy pożądaną charakteryzację: wszystkie termy zamknięte w postaci normalnej typu $((o \rightarrow o) \rightarrow o) \rightarrow o$ to

$$\lambda f^{(o \rightarrow o) \rightarrow o}. f(\lambda x_1^o. f(\lambda x_2^o. f(\dots \lambda x_k^o. x_i \dots))),$$

dla $k \geq 1$ i $i = 1, \dots, k$.

Ciekawe jest pytanie, które elementy zbioru $D_{((o \rightarrow o) \rightarrow o) \rightarrow o}$ są denotacjami zamkniętych lambda wyrażeń. Takie było oryginalne sformułowanie tego zadania. Analiza tego typu jest jednak znacznie bardziej skomplikowana, niż typu $(o \rightarrow o) \rightarrow o \rightarrow o$ — elementów zbioru $D_{((o \rightarrow o) \rightarrow o) \rightarrow o}$ jest 65536 i wyznaczenie obrazu zbioru

$$\left\{ \lambda f^{(o \rightarrow o) \rightarrow o} . f(\lambda x_1^o . f(\lambda x_2^o . f(\dots \lambda x_k^o . x_i \dots))) \mid k \geq 1, i = 1, \dots, k \right\}$$

w odwzorowaniu $\llbracket \cdot \rrbracket$ jest znacznie bardziej pracochłonne.