

Grupy zasadnicze

Basic groups

Zadanie 1 (1 pkt). Narysuj grafy redukcji następujących lambda wyrażeń:

Problem 1 (1 p). Draw the reduction graphs of the following lambda terms:

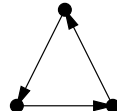
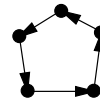
1. $(\lambda xyz.t.xz(yzt))(\lambda xy.x(xy))(\lambda xy.x(x(xy)))$
2. $\lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$
3. $(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)$
4. $(\lambda xy.y)((\lambda x.x(x(xx))) (\lambda x.x))$
5. $(\lambda bxz.z(bbx))(\lambda bxz.z(bbx))x$

Zaznacz w tych grafach ścieżki redukcji leniwej i gorliwej oraz słabą czołową postać normalną podanych lambda wyrażeń przyjmując leniwą i gorliwą strategię redukcji.

Indicate in these graphs the lazy and eager reduction paths and the weak head normal forms of the given lambda terms assuming the lazy and eager reduction strategies.

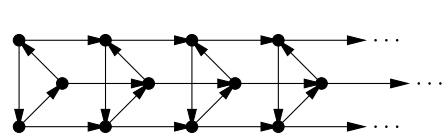
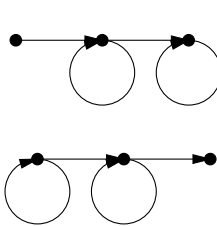
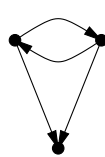
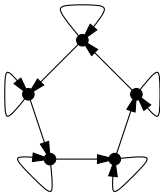
Zadanie 2 (1 pkt). Znajdź termy, których grafy redukcji mają następujący kształt:

Problem 2 (1 p). Find terms whose reduction graphs have the following shapes:

 G_1  G_2  G_3  G_5

Zadanie 3 (1 pkt). Znajdź termy, których grafy redukcji mają następujący kształt:

Problem 3 (1 p). Find terms whose reduction graphs have the following shapes:



Zadanie 4 (1 pkt). Pokaż, że dla każdego termu t istnieje taki term s , że $ts = s$ (tj. że każde lambda wyrażenie posiada punkt stały). Pokaż, że dla każdego termu t istnieje taki term s , że $ts = st$. Pokaż, że lambda wyrażenie

Problem 4 (1 p). Show that for any term t there exists such a term s , that $ts = s$ (i.e., every lambda term possesses a fixpoint). Show that for any term t there exists such a term s , that $ts = st$. Show that the lambda term

$$Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$$

jest operatorem punktu stałego, tj. że dla każdego wyrażenia t zachodzi

is a *fixpoint operator*, i.e., for every term t one has

$$Yt =_{\beta} t(Yt).$$

Zauważ, że nie prawdą jest, iż $Yt \rightarrow_{\beta} t(Yt)$. Znajdź lambda wyrażenie Y' o tej własności, że dla każdego wyrażenia t zachodzi $Y't \rightarrow_{\beta} t(Y't)$.

Note that it is not true that $Yt \rightarrow_{\beta} t(Yt)$. Find a lambda term Y' such that for every term t one has $Y't \rightarrow_{\beta} t(Y't)$.

Zadanie 5 (1 pkt). Niech $R \subseteq X^2$ będzie relacją binarną określoną na pewnym zbiorze X . Pokaż, że jeśli R jest konfluentna, to R^* też. Pokaż, że jeżeli R^* jest słabo konfluentna, to jest konfluentna. Wskaż przykład takiej słabo konfluentnej relacji R , że R^* nie jest słabo konfluentna.

Problem 5 (1 p). Let $R \subseteq X^2$ be a binary relation defined on some set X . Show that if R is confluent, then so is R^* . Show that if R^* is weakly confluent, then it is confluent. Give an example of such a weakly confluent relation R , that R^* is not confluent.

Zadanie 6 (1 pkt). Udowodnij *lemat o podstawianiu* dla lambda termów: jeżeli $x_1 \notin \text{FV}(s_2)$ i $x_1 \neq x_2$, to

Problem 6 (1 p). Prove the *substitution lemma* for lambda terms:

$$[x_1/s_1][x_2/s_2] = [x_2/s_2][x_1/s_1[x_2/s_2]].$$

Zadanie 7 (1 pkt). Niech

Problem 7 (1 p). Let

$$\begin{aligned} |x| &= 1, \\ |ts| &= |t| + |s| + 1, \\ |\lambda x.t| &= 1 + |t| \end{aligned}$$

oraz

and

$$\begin{aligned} d(x) &= 1, \\ d(ts) &= \max\{d(t), d(s)\} + 1, \\ d(\lambda x.t) &= 1 + d(t). \end{aligned}$$

Udowodnij, że dla dowolnego termu t zachodzi

Prove that for any term t there is

$$\begin{aligned} |t| &\leq 2^{d(t)}, \\ 2|\text{FV}(t)| - 1 &\leq |t|. \end{aligned}$$

Udowodnij, że dla dowolnych termów t i s oraz zmiennej x zachodzi

Prove that for any terms t and s and a variable x there is

$$\begin{aligned} d(t[x/s]) &\leq d(t) + d(s), \\ |t[x/s]| &\leq \frac{1}{2}(|t| + 1)(|s| + 1) - 1. \end{aligned}$$

Zadanie 8 (1 pkt). Rozważmy omówiony na przykładzie problem kameleonów siedzących na gałęzi. Niech $\mathcal{A} = \{r, g, b\}$ i rozważmy następującą relację redukcji:

Problem 8 (1 p). Consider the problem described during the lecture of chameleons sitting on a branch. Let $\mathcal{A} = \{r, g, b\}$ and consider the following reduction relation:

$$\begin{aligned} rg &\rightarrow b \\ gr &\rightarrow b \\ rb &\rightarrow g \\ br &\rightarrow g \\ bg &\rightarrow r \\ gb &\rightarrow r \end{aligned}$$

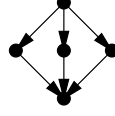
Pokaż, że powyższy system przepisywania słów nie jest słabo konfluentny. Czy każde słowo posiada postać normalną? Czy ten system jest zatrzymujący się?

Show that this word rewriting system is not weakly confluent. Does every word possess a normal form? Is this system terminating?

Grupy rozszerzone

Extended groups

Zadanie 1 (1 pkt). Pokaż, że nie istnieje graf redukcji o następującym kształcie:



Problem 1 (1 p). Show that there is no reduction graph having the following shape:

Zadanie 2 (1 pkt). Pokaż, że jeżeli relacja R jest słabo konfluentna i zatrzymująca się (tj. nie istnieje taki nieskończony ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^\omega$, że $x_n R x_{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$), to R^* jest konfluentna.

Problem 2 (1 p). Show that if R is weakly confluent and terminating (i.e., there is no such infinite sequence $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^\omega$, that $x_n R x_{n+1}$ for $n \in \mathbb{N}$), then R^* is confluent.

Zadanie 3 (1 pkt). Niech $\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$ będzie algebrą termów nad pewną sygnaturą i pewnym zbiorem zmiennych, a Λ — zbiorem lambda wyrażeń. Definiujemy *reprezentację* symboli z sygnatury w rachunku lambda: $\underline{\cdot} : \Sigma \rightarrow \Lambda$ i przedłużamy ją homomorficznie na zbiór wszystkich termów:

Problem 3 (1 p). Let $\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$ be the algebra of terms over some signature with some set of variables, and Λ — the set of lambda terms. We define a *representation* of symbols from the signature in the lambda calculus: $\underline{\cdot} : \Sigma \rightarrow \Lambda$ and extend it homomorphically to the set of all terms:

$$\begin{aligned} \underline{f(t_1, \dots, t_n)} &= \underline{f}(\underline{t_1}, \dots, \underline{t_n}), \\ \underline{v} &= \eta(v), \end{aligned}$$

gdzie η jest pewną bijekcją przyporządkowującą zmienne rachunku lambda zmiennym ze zbioru $\mathcal{V}$. Reprezentacja $\underline{\cdot}$ jest *zgodna* ze zbiorem równości E wtedy i tylko wtedy, gdy

where η is some bijection assigning variables from the lambda calculus to variables from the set $\mathcal{V}$. A representation $\underline{\cdot}$ conforms to a set of equalities E if and only if

$$E \vdash t = s \iff \underline{t} =_\beta \underline{s}.$$

Rozważmy binarny symbol *pair* oraz unarne symbole *fst* i *snd*. Oto specyfikacja równościowa par:

Consider a binary symbol *pair* and unary symbols *fst* and *snd*. Here is the equational specification for pairs:

$$\begin{aligned} \text{fst}(\text{pair}(x, y)) &= x, \\ \text{snd}(\text{pair}(x, y)) &= y. \end{aligned}$$

Niech

Let

$$\underline{\text{pair}} = \lambda xyz. zxy.$$

Zdefiniuj $\underline{\text{fst}}$ i $\underline{\text{snd}}$ tak, by otrzymać reprezentację par w rachunku lambda zgodną z ich specyfikacją równościową.

Define $\underline{\text{fst}}$ and $\underline{\text{snd}}$ so that this representation conforms to the equational specification of pairs.

Rozważmy sygnaturę $\Sigma = \{0/0'/1, +/2\}$, zbiór zmiennych $\mathcal{X} = \{x, y, z, x_1, x_2, \dots\}$ i równości E :

Consider the signature $\Sigma = \{0/0'/1, +/2\}$, the set of variables $\mathcal{X} = \{x, y, z, x_1, x_2, \dots\}$ and the equalities E :

$$\begin{aligned} 0 + y &= y, \\ x' + y &= (x + y)'. \end{aligned}$$

Zdefiniuj reprezentację termów ze zbioru $\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{X})$ w rachunku lambda zgodną ze zbiorem równości E .

Define a representation of terms from the set $\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{X})$ in the lambda calculus which conforms to the set E .

Zadanie 4 (1 pkt). Rozważmy formuły rachunku zdań opisane następującą składnią abstrakcyjną:

$$\phi ::= \perp \mid \top \mid p \mid \neg\phi \mid \phi_1 \vee \phi_2 \mid \phi_1 \wedge \phi_2 \mid \phi_1 \Rightarrow \phi_2 \mid \phi_1 \Leftrightarrow \phi_2.$$

Niech

Let

$$\perp = \lambda xy.y,$$

$$\top = \lambda xy.x.$$

Zdefiniuj $\sqsubset, \sqcup, \sqcap, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ tak, by dla każdej formuły ϕ nie zawierającej zmiennych zdaniowych zachodziło:

Define $\sqsubset, \sqcup, \sqcap, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ so that for every formula ϕ without propositional variables there is:

$$(\llbracket \phi \rrbracket = 0 \Rightarrow \phi \xrightarrow{*}_\beta \perp) \wedge (\llbracket \phi \rrbracket = 1 \Rightarrow \phi \xrightarrow{*}_\beta \top).$$

Niech $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ będzie zbiorem zmiennych zdaniowych i niech $\Phi_n = \{\phi \mid FV(\phi) \subseteq \{p_i\}_{i=0}^{n-1}\}$, SAT będzie zbiorem formuł spełnialnych, a $TAUT$ — zbiorem tautologii. Zdefiniuj odwzorowania

Let $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ be a set of propositional variables and let $\Phi_n = \{\phi \mid FV(\phi) \subseteq \{p_i\}_{i=0}^{n-1}\}$, SAT be the set of satisfiable formulas, and $TAUT$ — the set of tautologies. Define maps

$$Sat_n : \Phi_n \rightarrow \Lambda,$$

$$Taut_n : \Phi_n \rightarrow \Lambda,$$

tak, by

so that

$$\begin{aligned} (\phi \in SAT \Rightarrow Sat_n(\phi) \xrightarrow{*}_\beta \top) \wedge (\phi \notin SAT \Rightarrow Sat_n(\phi) \xrightarrow{*}_\beta \perp), \quad \phi \in \Phi_n, \\ (\phi \in TAUT \Rightarrow Taut_n(\phi) \xrightarrow{*}_\beta \top) \wedge (\phi \notin TAUT \Rightarrow Taut_n(\phi) \xrightarrow{*}_\beta \perp), \quad \phi \in \Phi_n. \end{aligned}$$

Zadanie 5 (1 pkt). Liczby naturalne będziemy reprezentować za pomocą tzw. liczebników Churcha:

Problem 5 (1 p). We will represent natural numbers by so called Church numerals:

$$\underline{m} = \lambda f.\lambda x.f^{(m)}x,$$

gdzie

where

$$\begin{aligned} t^{(0)}s &= s, \\ t^{(n+1)}s &= t(t^{(n)}s), \end{aligned}$$

dla dowolnych termów t i s . Mówimy, że funkcja $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ jest λ -obliczalna (względem kodowania liczb naturalnych za pomocą liczebników Churcha), jeżeli istnieje takie lambda wyrażenie $\underline{f}$, że dla wszelkich liczb naturalnych $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ zachodzi

for any terms t and s . We say that a function $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ is λ -computable (with respect to the coding of natural numbers by Church numerals) if there exists such a lambda expression $\underline{f}$ that for all natural numbers $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ one has

$$\underline{f}(m_1, \dots, m_k) =_\beta \underline{f} \underline{m_1} \dots \underline{m_k}.$$

Pokaż, że λ -obliczalne są: następnik, poprzednik, cztery podstawowe działania arytmetyczne (przyjmując, że $n - m = 0$ dla $n < m$ i że poprzednikiem 0 jest 0 i rozważając dzielenie całkowite), potęgowanie i funkcje

Show that the following functions are λ -definable: the successor, predecessor, four basic arithmetic operations (assuming that $n - m = 0$ for $n < m$, the predecessor of 0 is 0, and considering the integer division), exponentiation and functions:

$$\begin{aligned} \text{sgn}(n) &= \begin{cases} 1, & \text{if } n > 0, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \\ \text{lt}(n, m) &= \begin{cases} 1, & \text{if } n < m, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \\ \text{eq}(n, m) &= \begin{cases} 1, & \text{if } n = m, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

Zadanie 6 (1 pkt). Rozważmy sygnaturę $\mathcal{K} = \{S/0, K/0, \cdot/2\}$, zbiór zmiennych $\mathcal{X} = \{x, y, z, x_1, x_2, \dots\}$ i równości CL:

$$\begin{aligned} K \cdot x \cdot y &= x, \\ S \cdot x \cdot y \cdot z &= (x \cdot z) \cdot (y \cdot z) \end{aligned}$$

(operator $\cdot$ wiąże w lewo). Teoria ta nazywa się *rachunkiem kombinatorów*. Odzworowanie

Problem 6 (1 p). Consider the signature $\mathcal{K} = \{S/0, K/0, \cdot/2\}$, the set of variables $\mathcal{X} = \{x, y, z, x_1, x_2, \dots\}$ and the equalities CL:

(the operator $\cdot$ associates to the left). This theory is called the *calculus of combinators*. The map

$$\begin{aligned} \underline{K} &= \lambda xy.x, \\ \underline{S} &= \lambda xyz.xz(yz), \\ \underline{\cdot} &= \lambda xy.xy \end{aligned}$$

wydaje się być reprezentacją kombinatorów w rachunku lambda. Istotnie, zachodzi następująca implikacja:

seems to be a representation of combinators in the lambda calculus. Indeed, the following implication holds:

$$\text{CL} \vdash t = s \implies \underline{t} =_{\beta} \underline{s},$$

ale odwrotna implikacja jest fałszywa. Wskaż przykład, dla którego nie zachodzi. Zdefiniuj odwzorowanie $\bar{\cdot} : \Lambda \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{K}, \mathcal{X})$ takie, że

but the converse implication is false. Give an example for which it does not hold. Define a map $\bar{\cdot} : \Lambda \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{K}, \mathcal{X})$ so that

$$\text{CL} \vdash \bar{t} = \bar{s} \implies t =_{\beta} s,$$

dla dowolnych termów $t, s \in \Lambda$. Odwzorowanie $\bar{\cdot}$ nie musi być odwrotne do $\underline{\cdot}$, ale dla dowolnego termu t powinno być

for all terms $t, s \in \Lambda$. The map $\bar{\cdot}$ may not be the inverse of $\underline{\cdot}$, but for any term t there should be

$$\underline{(\bar{t})} =_{\beta} t.$$

Zadanie 7 (1 pkt). Na zbiorze lambda wyrażeń zadanych poniższą składnią abstrakcyjną

Problem 7 (1 p). On the set of lambda terms specified by the abstract syntax given below

$$t ::= x \mid sr \mid \lambda x.s$$

określamy następujące funkcje:

we define the following functions:

$$\begin{aligned} \text{FV}(x) &= \{x\} \\ \text{FV}(sr) &= \text{FV}(s) \cup \text{FV}(r) \\ \text{FV}(\lambda x.s) &= \text{FV}(s) \setminus \{x\} \\ \text{BV}(x) &= \emptyset \\ \text{BV}(sr) &= \text{BV}(s) \cup \text{BV}(r) \\ \text{BV}(\lambda x.s) &= \text{BV}(s) \cup \{x\} \\ \text{path}(x) &= \{\epsilon\} \\ \text{path}(sr) &= \{L\sigma \mid \sigma \in \text{path}(s)\} \cup \{R\sigma \mid \sigma \in \text{path}(r)\} \\ \text{path}(\lambda x.s) &= \{*\sigma \mid \sigma \in \text{path}(s)\} \\ \text{occ}(t, \epsilon) &= t \\ \text{occ}(sr, L\sigma) &= \text{occ}(s, \sigma) \\ \text{occ}(sr, R\sigma) &= \text{occ}(r, \sigma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{occ}(\lambda x.s, * \sigma) &= \text{occ}(s, \sigma) \\
\text{free}(x, x) &= \{\epsilon\} \\
\text{free}(y, x) &= \emptyset, \quad x \neq y \\
\text{free}(sr, x) &= \{L\sigma \mid \sigma \in \text{free}(s, x)\} \cup \{R\sigma \mid \sigma \in \text{free}(r, x)\} \\
\text{free}(\lambda x.s, x) &= \emptyset \\
\text{free}(\lambda y.s, x) &= \{* \sigma \mid \sigma \in \text{free}(s, x)\}, \quad x \neq y \\
\text{bound}(y, x) &= \emptyset \\
\text{bound}(sr, x) &= \{L\sigma \mid \sigma \in \text{bound}(s, x)\} \cup \{R\sigma \mid \sigma \in \text{bound}(r, x)\} \\
\text{bound}(\lambda x.s, x) &= \{* \sigma \mid \sigma \in \text{bound}(s, x) \cup \text{free}(s, x)\} \\
\text{bound}(\lambda y.s, x) &= \{* \sigma \mid \sigma \in \text{bound}(s, x)\}, \quad x \neq y \\
\text{freeOcc}(t) &= \bigcup_{x \in \text{FV}(t)} \text{free}(t, x) \\
\text{boundOcc}(t) &= \bigcup_{x \in \text{BV}(t)} \text{bound}(t, x) \\
\text{binder}(sr, L\sigma) &= L \text{ binder}(s, \sigma) \\
\text{binder}(sr, R\sigma) &= R \text{ binder}(r, \sigma) \\
\text{binder}(\lambda x.s, * \sigma) &= \begin{cases} \epsilon, & \text{if binder}(s, \sigma) \text{ is undefined} \\ * \text{ binder}(s, \sigma), & \text{otherwise} \end{cases} \\
\text{binder}(\lambda y.s, * \sigma) &= * \text{ binder}(s, \sigma), \quad x \neq y
\end{aligned}$$

Wyraż za pomocą podanych wyżej funkcji następującą definicję relacji α -równoważności: terminy r_1 i r_2 są α -równoważne, jeśli:

1. zbiory ścieżek terminów r_1 i r_2 są równe;
2. zbiory wystąpień zmiennych wolnych w terminach r_1 i r_2 są równe; zbiory wystąpień zmiennych związanych w terminach r_1 i r_2 są równe;
3. jeśli σ jest wystąpieniem zmiennej wolnej w terminie r_1 , to zmienne występujące na ścieżce σ w terminach r_1 i r_2 są równe;
4. jeśli σ jest wystąpieniem zmiennej związanej w terminie r_1 , to wystąpienia wiążące zmienną występującą na ścieżce σ w terminach r_1 i r_2 są równe.

Udowodnij, że tak określona relacja $\equiv_\alpha$ jest relacją równoważności.

Zadanie 8 (1 pkt). Niech t_0 będzie lambda wyrażeniem, a S skończonym zbiorem zmiennych. Pokaż, że istnieje taki regularny term $t \equiv_\alpha t_0$, że żadna zmienna ze zbioru S nie jest związana w t .

Express the following definition of the α -equivalence relation using the functions defined above: terms r_1 and r_2 are α -equivalent if:

1. the sets of paths in terms r_1 and r_2 are equal;
2. the sets of free variable occurrences in terms r_1 and r_2 are equal; the sets of bound variable occurrences in terms r_1 and r_2 are equal;
3. if σ is a free variable occurrence in r_1 , then variables occurring on the path σ in terms r_1 and r_2 are equal;
4. if σ is a bound variable occurrence in r_1 and r_2 , then the binder of σ in r_1 is equal to the binder of σ in r_2 .

Prove that the relation $\equiv_\alpha$ defined this way is an equivalence relation.

Problem 8 (1 p). Let t_0 be a lambda term, and S a finite set of variables. Show that there exists such a regular term $t \equiv_\alpha t_0$, that no variable from S is bound in t .

Grupa zaawansowana

Advanced group

Zadanie 1 (2 pkt). Rozważmy język „While” zadany następującą składnią abstrakcyjną:

$$\begin{aligned} n &\in \mathbb{Z} \\ i &::= y \mid x1 \mid x2 \mid x3 \mid \dots \\ a &::= n \mid i \mid a_1 \oplus a_2 \\ \oplus &::= + \mid - \mid \times \mid \text{div} \mid \text{mod} \\ b &::= a_1 \otimes a_2 \mid \neg b \mid b_1 \odot b_2 \\ \otimes &::= \leq \mid < \mid \geq \mid > \mid = \mid \neq \\ \odot &::= \vee \mid \wedge \\ c &::= x := a \mid c_1 ; c_2 \mid \text{if } b \text{ then } c_1 \text{ else } c_2 \mid \text{while } b \text{ do } c \end{aligned}$$

Funkcja częściowa $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ jest *While-obliczalna* jeżeli istnieje taki program c_f w języku „While”, że

$$f(m_1, \dots, m_k) = (\llbracket c_f \rrbracket[x1 \rightarrow m_1, \dots, xk \rightarrow m_k])(y),$$

dla wszelkich $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$. Pokaż, że funkcja jest „While”-obliczalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest λ -obliczalna.

Zadanie 2 (2 pkt). Niech E będzie dowolnym zbiorem równości na termach z pewnego zbioru $\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$. Czy zawsze istnieje reprezentacja termów w rachunku lambda zgodna z E ?

Zadanie 3 (2 pkt). Rozważmy system przepisywania termów pierwszego rzędu złożonych ze stałej S i binarnego symbolu $\cdot$ (który, podobnie jak w algebrze, będziemy opuszczać), zadany następującą regułą redukcji:

$$Sxyz \rightarrow xz(yz)$$

(tj. rachunek kombinatorów ograniczony do symbolu S). Czy system ten jest zatrzymujący się?

Problem 1 (2 p). Consider the “While” language given by the following abstract syntax:

A partial function $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ is *While-computable* if there exists such a program c_f in the “While” language, that

for all $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$. Show that a function is “While”-computable if and only if it is λ -computable.

Problem 2 (2 p). Let E be an arbitrary set of equalities on terms from some set $\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$. Does there always exist a representation of terms in the lambda calculus that conforms to E ?

Problem 3 (2 p). Consider the rewriting system of first order terms built from a constant S and a binary symbol $\cdot$ (which, as in algebra, we will omit), given by the following reduction rule:

(i.e., the calculus of combinators restricted to the symbol S). Is it terminating?