

Programowanie 2009 Programming 2009

Lista zadań nr 10 Problem set no. 10

Na zajęcia 12–13 maja 2009 Due May 13, 2009

Niech Σ będzie sygnaturą jednogatunkową. Przypomnijmy system wnioskowania dla teorii równościowych:

Let Σ be a single sorted signature. Let us recall the proof system for equational theories:

$$\frac{}{E \vdash t = t} \quad \frac{E \vdash t = s}{E \vdash s = t} \quad \frac{E \vdash r = s \quad E \vdash s = t}{E \vdash r = t} \quad \frac{E \vdash s = t \quad E \vdash u = v}{E \vdash u[x/s] = v[x/t]}$$

Reguła indukcji:

The induction rule:

$$\frac{\{ E, (t = s)[x/c_1], \dots, (t = s)[x/c_{ar(f)}] \vdash_{\text{ind}} (t = s)[x/f(c_1, \dots, c_{ar(f)})] \}_{f \in \Gamma}}{E \vdash_{\text{ind}} t = s}$$

gdzie c_i to stałe Skolema, a $\Gamma \subseteq \Sigma$ jest takim podzbiorem sygnatury, że dla każdego termu stałego $t \in \mathcal{T}(\Sigma, \emptyset)$ istnieje taki term $s \in \mathcal{T}(\Gamma, \emptyset)$, że $E \vdash t = s$. W szczególności Γ może być zbiorem konstruktorów. Reguła indukcji jest prawdziwa jedynie w algebrach osiągalnych.

where c_i are Skolem constants, and $\Gamma \subseteq \Sigma$ is such subset of the signature, that for any ground term $t \in \mathcal{T}(\Sigma, \emptyset)$ there exists such term $s \in \mathcal{T}(\Gamma, \emptyset)$, that $E \vdash t = s$. In particular a set of constructors may be taken for Γ . The induction rule is valid only in reachable algebras.

Grupy zasadnicze Basic groups

Rozważmy następującą specyfikację algebraiczną list liczb naturalnych:

Consider the following algebraic specification for lists of natural numbers:

Sorts: $nat, list$
 Functions: $0, 1 :: nat$
 $(+) :: nat \times nat \rightarrow nat$ (infixl 6)
 $nil :: list$
 $(:) :: nat \times list \rightarrow list$ (infixr 5)
 $(++) :: list \times list \rightarrow list$ (infixr 5)
 $rev :: list \rightarrow list$ (prefix 10)
 $len :: list \rightarrow nat$ (prefix 10)
 Equations: $0 + x = x$ (1)
 $x + 0 = x$ (2)
 $(x + y) + z = x + (y + z)$ (3)
 $nil ++ xs = xs$ (4)
 $(x : xs) ++ ys = x : (xs ++ ys)$ (5)
 $rev(nil) = nil$ (6)
 $rev(x : xs) = rev(xs) ++ (x : nil)$ (7)
 $len(nil) = 0$ (8)
 $len(x : xs) = 1 + len(xs)$ (9)
 where $x, y, z :: nat$
 $xs, ys :: list$

Przyjmujemy semantykę algebry początkowej. W poniższych zadaniach udowodnij, że podane równości zachodzą w algebrze początkowej. Twój dowód może być nieformalny, ale musisz uzasadnić każdy krok rozumowania (wskazać regułę wnioskowania i/lub aksjomat).

We assume the initial algebra semantics. Prove that given equalities in problems below hold in the initial algebra. Your proof can be informal, by you have to justify every step of your reasoning (to indicate an inference rule and/or an axiom).

Zadanie/Problem 1 (1 p). $xs \mathbin{++} nil = xs$.

Zadanie/Problem 2 (1 p). $rev(xs) \mathbin{++} rev(ys) = rev(ys \mathbin{++} xs)$.

Zadanie/Problem 3 (1 p). $len(xs \mathbin{++} ys) = len(xs) + len(ys)$.

Zadanie/Problem 4 (1 p). $len(rev(xs)) = len(xs)$.

Zadanie/Problem 5 (1 p). $rev(rev(xs)) = xs$.

Zadanie 6 (1 pkt). Niech

Problem 6 (1 p). Let

$C = \text{while } Y \leq R \text{ do } R := R - Y; Q := Q + 1; \text{ done.}$

Wyznacz $wp(C, R < Y \wedge X = R + Y \cdot Q)$. (Warunek końcowy oznacza, że Q jest ilorazem a R resztą z dzielenia X przez Y .) Dla jakich asercji ϕ jest prawdziwe $\{\phi\}C\{\phi\}$?

Calculate $wp(C, R < Y \wedge X = R + Y \cdot Q)$. (The final condition means that Q is the quotient, and R the remainder of X divided by Y .) For which assertions ϕ there is $\{\phi\}C\{\phi\}$?

Zadanie 7 (1 pkt). Niech

Problem 7 (1 p). Let

$\text{data Term sig var} = \text{Var var} \mid \text{FunSym sig [Term sig var]}$

będzie gramatyką abstrakcyjną opisującą termy nad sygnaturą $\text{sig} :: *$ ze zbiorem zmiennych $\text{var} :: *$. Dla ustalonej sygnatury sig typ $\text{Term sig} :: * \rightarrow *$ ma naturalną strukturę monady. Odkryj ją i zainstaluj typ Term sig w klasie Monad .

be an abstract grammar describing terms over a signature $\text{sig} :: *$ with a set of variables $\text{var} :: *$. For a fixed signature sig the type $\text{Term sig} :: * \rightarrow *$ has a natural structure of a monad. Discover it and install the type Term sig in the class Monad .

Grupy rozszerzone

Extended groups

Zadanie 1 (1 pkt). Zdefiniuj semantykę denotacyjną odpowiadającą przedstawionej wyżej semantyce algebraicznej list liczb naturalnych. Udowodnij, że opisana przez Ciebie algebra jest izomorficzna z algebrą początkową dla podanego zbioru równości.

Problem 1 (1 p). Define a denotational semantics that conforms to the algebraic semantics of lists of natural numbers given above. Prove that the algebra you described is isomorphic to the initial algebra for the given set of equalities.

Zadanie 2 (1 pkt). System przepisywania termów, to monotoniczna relacja $\rightarrow$ określona na termach. System jest *zatrzymujący się*, jeżeli nie istnieje taki nieskończony ciąg termów $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$, że $t_i \rightarrow t_{i+1}$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$. System jest *konfluentny*, jeżeli dla dowolnych trzech termów t, s_1 i s_2 , jeśli $t \xrightarrow{*} s_1$ i $t \xrightarrow{*} s_2$, to istnieje taki term r , że $s_1 \xrightarrow{*} r$ i $s_2 \xrightarrow{*} r$. W konfluentnym i zatrzymującym się systemie każdy term t posiada dokładnie jedną *postać normalną*, tj. taki term s , że $t \xrightarrow{*} s$ i nie istnieje term r taki, że $s \rightarrow r$. *Wartością termu* jest zbiór wszystkich termów posiadających tę samą postać normalną.

Problem 2 (1 p). A term rewriting system is a monotonic relation $\rightarrow$ on terms. A system is *terminating* if there is no infinite sequence of terms $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ such that $t_i \rightarrow t_{i+1}$ for any $i \in \mathbb{N}$. A system is *confluent* if for any three terms t, s_1 and s_2 if $t \xrightarrow{*} s_1$ and $t \xrightarrow{*} s_2$, then there exists such a term r that $s_1 \xrightarrow{*} r$ and $s_2 \xrightarrow{*} r$. In any confluent and terminating rewriting system any term possesses exactly one *normal form*, i.e., such a term s , that $t \xrightarrow{*} s$ and there is no such term r , that $s \rightarrow r$. *The value of a term* is the set of all terms having the same normal form.

Semantykę operacyjną języka deklaratywnego można zadać w postaci pewnego systemu przepisывania termów. Zdefiniuj taki system dla list z poprzedniego zadania. Udowodnij, że zgadza się on z semantyką denotacyjną i algebraiczną, tj. pokaż, że termy stałe posiadają tę samą wartość w semantyce operacyjnej wtedy i tylko wtedy, gdy są równe w semantyce algebraicznej oraz gdy mają tę samą denotację w semantyce denotacyjnej.

An operational semantics of a declarative language can be defined in the form of a term rewriting system. Define such a system for lists from the previous problem. Prove that it conforms to the denotational and algebraic semantics, i.e., show, that ground terms possess the same value in the operational semantics if and only if they are equal in the algebraic semantics and have the same denotation in the denotational semantics.

Zadanie 3 (1 pkt). Niech $\text{Th}(\mathcal{A}) = \{t = s \mid \mathcal{A} \models t = s, t, s \in \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{X})\}$ oznacza zbiór równości spełnionych w algebrze $\mathcal{A}$, a $\text{Th}(E) = \{t = s \mid E \models t = s, t, s \in \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{X})\}$ oznacza zbiór równości spełnionych we wszystkich algebrach spełniających zbiór równości E . Pokaż, że dla dowolnego zbioru równości E istnieje algebra $\mathcal{A}$ w której są spełnione dokładnie te równości, które są spełnione we wszystkich algebrach spełniających E , tj. $\text{Th}(\mathcal{A}) = \text{Th}(E)$. *Wskazówka:* wykaż, że algebrą tą jest $\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{X})/\text{Th}(E)$.

Zadanie 4 (1 pkt). Udowodnij twierdzenie Birkhoffa o pełności: dla dowolnego zbioru równości E i dowolnej równości $t = s$ jest $E \vdash t = s$ wtedy i tylko wtedy, gdy $E \models t = s$.

Zadanie 5 (1 pkt). Udowodnij, że dla dowolnego zbioru równości E w klasie wszystkich algebr spełniających E istnieje algebra początkowa i jest ona izomorficzna z algebrą $\mathcal{T}(\Sigma, \emptyset)/\text{Th}(E)$.

Zadanie 6 (1 pkt). Niech $\Sigma = \{0/0, ' /1, +/2\}$ oraz

$$\begin{aligned} E_1 &= \{0 + x = x, x' + y = (x + y)'\}, \\ E_2 &= E_1 \cup \{x + y = y + x, (x + y) + z = x + (y + z)\}, \end{aligned}$$

a $\mathcal{N}_i$ będzie algebrą początkową dla E_i , dla $i = 1, 2$. Udowodnij, że

1. $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ i algebra $\mathcal{N}$ liczb naturalnych z zerem, następnikiem i dodawaniem są izomorficzne,
2. $E_1 \vdash_{\text{ind}}$ jest zupełny dla $\mathcal{N}$,
3. $E_1 \vdash$ nie jest zupełny dla $\mathcal{N}$,
4. $E_2 \vdash$ jest zupełny dla $\mathcal{N}$.

Zadanie 7 (1 pkt). Rozważmy sygnaturę $\Sigma = \{a/0 \mid a \in A\} \cup \{\emptyset/0, \epsilon/0, +/2, \cdot/2, */1\}$ opisującą składnię abstrakcyjną wyrażeń regularnych nad pewnym alfabetem A . Znajdź taki zbiór równości E , by algebra początkowa dla E była izomorficzna z semantyką denotacyjną wyrażeń regularnych. Udowodnij, że algebry te są izomorficzne.

Problem 3 (1 p). Let $\text{Th}(\mathcal{A}) = \{t = s \mid \mathcal{A} \models t = s, t, s \in \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{X})\}$ stands for the set of equalities satisfied in an algebra $\mathcal{A}$, and $\text{Th}(E) = \{t = s \mid E \models t = s, t, s \in \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{X})\}$ stands for the set of equalities satisfied in all algebras satisfying a set of equalities E . Show that for any set of equalities E there exists an algebra $\mathcal{A}$ that satisfies exactly those equations which are satisfied in all algebras satisfying E , i.e., $\text{Th}(\mathcal{A}) = \text{Th}(E)$. *Hint:* show that $\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{X})/\text{Th}(E)$ is the algebra.

Problem 4 (1 p). Prove the Birkhoff completeness theorem: for any set of equations E and any equation $t = s$ one has $E \vdash t = s$ if and only if $E \models t = s$.

Problem 5 (1 p). Prove that for any set of equations E there exists the initial algebra in the class of all algebras satisfying E and that it is isomorphic to $\mathcal{T}(\Sigma, \emptyset)/\text{Th}(E)$.

Problem 6 (1 p). Let $\Sigma = \{0/0, ' /1, +/2\}$ and

and $\mathcal{N}_i$ be an initial algebra for E_i , for $i = 1, 2$. Prove that

1. $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$, and the algebra $\mathcal{N}$ of natural numbers with zero, successor and addition are isomorphic,
2. $E_1 \vdash_{\text{ind}}$ is complete for $\mathcal{N}$,
3. $E_1 \vdash$ is not complete for $\mathcal{N}$,
4. $E_2 \vdash$ is complete for $\mathcal{N}$.

Problem 7 (1 p). Consider a signature $\Sigma = \{a/0 \mid a \in A\} \cup \{\emptyset/0, \epsilon/0, +/2, \cdot/2, */1\}$ describing the abstract syntax of the regular expressions over some alphabet A . Find such a set of equations E , that the initial algebra for E is isomorphic to the denotational semantics of the regular expressions. Prove that these algebras are isomorphic.

Grupa zaawansowana

Advanced group

Zadanie 1 (1 pkt). Rozważmy sygnaturę $\Sigma = \{1/0, +/2, \cdot/2\}$ i zbiór równości $\widehat{\text{HSI}}$:

$$\begin{aligned} x + y &= y + x & (1) \\ (x + y) + z &= x + (y + z) & (2) \\ x \cdot 1 &= x & (3) \\ x \cdot y &= y \cdot x & (4) \\ (x \cdot y) \cdot z &= x \cdot (y \cdot z) & (5) \\ x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z & (6) \end{aligned}$$

Udowodnij, że

1. istnieje algorytm sprawdzający, czy $\widehat{\text{HSI}} \vdash t = s$ dla dowolnych termów t i s ;
2. $\widehat{\text{HSI}}$ jest zupełny dla zbioru dodatnich liczb naturalnych z jedyneką, dodawaniem i mnożeniem.

Które równości można usunąć jeśli dodamy regułę indukcji?

Zadanie 2 (1 pkt). Dodajemy symbol $\uparrow/2$ do sygnatury, a następujące równości:

$$1 \uparrow x = 1 \quad (7)$$

$$x \uparrow 1 = x \quad (8)$$

$$x \uparrow (y + z) = x \uparrow y \cdot x \uparrow z \quad (9)$$

$$(x \cdot y) \uparrow z = x \uparrow z \cdot y \uparrow z \quad (10)$$

$$(x \uparrow y) \uparrow z = x \uparrow (y \cdot z) \quad (11)$$

do zbioru $\widehat{\text{HSI}}$. Niech HSI oznacza zbiór wszystkich jedenastu równości. Pokaż, że HSI jest adekwatny dla:

1. zbioru dodatnich liczb naturalnych z jedyneką, dodawaniem, mnożeniem i potęgowaniem;
2. algebry zbiorów częściowo uporządkowanych, w której jedyneką jest zbiorem jednoelementowym, dodawanie — sumą rozłączną, mnożenie — produktem kartezjańskim, zaś $A \uparrow B$ oznacza zbiór funkcji monotonicznych ze zbioru B w zbiór A .

Zadanie 3 (8 pkt). **Bardzo trudne!** Udowodnij, że HSI nie jest zupełny dla zbioru dodatnich liczb naturalnych z jedyneką, dodawaniem, mnożeniem i potęgowaniem.

Zadanie 4 (8 pkt). **Bardzo trudne!** Udowodnij, że istnieje algorytm rozstrzygający, czy podana równość jest prawdziwa w zbiorze dodatnich liczb naturalnych z jedyneką, dodawaniem, mnożeniem i potęgowaniem.

Zadanie 5 (8 pkt). **Być może otwarte!** Czy HSI rozszerzony o regułę indukcji jest zupełny dla zbioru dodatnich liczb naturalnych z jedyneką, dodawaniem, mnożeniem i potęgowaniem?

Prove that

1. there exists an algorithm that checks whether $\widehat{\text{HSI}} \vdash t = s$ for any terms t i s ;
2. $\widehat{\text{HSI}}$ is complete for the set of positive natural numbers with one, addition and multiplication.

Which of the equations can be removed if we add the rule of induction?

Problem 2 (1 p). We add the symbol $\uparrow/2$ to the signature, and the following equations:

to the set $\widehat{\text{HSI}}$. Let HSI stands for the set of all eleven equalities. Prove that HSI is sound for:

1. the set of positive natural numbers with one, addition, multiplication and exponentiation;
2. the algebra of posets, where one is a one-element set, addition — the disjoint union, multiplication — the Cartesian product, and $A \uparrow B$ is a set of order-preserving functions from B to A .

Problem 3 (8 p). **Very difficult!** Prove that HSI is not complete for the set of positive natural numbers with one, addition, multiplication and exponentiation.

Problem 4 (8 p). **Very difficult!** Prove that there exists an algorithm that checks whether a given equality holds in the set of positive natural numbers with one, addition, multiplication and exponentiation.

Problem 5 (8 p). **Possibly open!** Is HSI augmented with the rule of induction complete for the set of positive natural numbers with one, addition, multiplication and exponentiation?