Programowanie rozszerzone

Lista zadań nr 2

Na ćwiczenia 9 i 10 marca 2010

Mówimy, że formuła ϕ logiki I-go rzędu jest logiczną konsekwencją zbioru formuł $\mathcal{F}$, co zapisujemy $\mathcal{F} \models \phi$, jeśli w każdej strukturze, w której prawdziwe są wszystkie formuły ze zbioru $\mathcal{F}$, prawdziwa jest również formuła ϕ.

Zadanie 1 (2 pkt). Udowodnij, że jeżeli C i D są klauzulami w logice I-go rzędu, A i B formułami atomowymi a θ najogólniejszym unifikatorem A i B, to $\{C \vee A,\ D \vee \neg B\} \models \theta(C \vee D)$.

Zadanie 2 (2 pkt). Niech $\mathcal{F}$ będzie zbiorem formuł a ϕ formułą logiki I-go rzędu. Udowodnij, że

1. $\mathcal{F} \models \phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór formuł $\mathcal{F} \cup \{\neg\phi\}$ jest niespełnialny;
2. $\mathcal{F}$ jest niespełnialny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła ϕ taka, że $\mathcal{F} \models \phi$ i $\mathcal{F} \models \neg\phi$.

Zadanie 3 (2 pkt).

1. Niech $\phi := \forall x.\exists y.p(x, y)$ i $\psi := \exists y.\forall x.p(x, y)$. Które z formuł $\phi \wedge \psi$, $\phi \wedge \neg\psi$, $\neg\phi \wedge \neg\psi$ i $\neg\phi \wedge \psi$ są spełnialne? Czy te spełnialne formuły są prawdziwe w jakiejś strukturze o dziedzinie będącej zbiorem liczb naturalnych? Czy któraś z tych formuł jest prawdziwa w dowolnej strukturze? Jeśli nie, to podaj przykład takiej formuły.
2. Pokaż, że formuła

$$(\forall x.\neg p(x, x)) \wedge (\forall x.\forall y.\forall z.p(x, y) \wedge p(y, z) \Rightarrow p(x, z)) \wedge (\forall x.\exists y.p(x, y))$$

   nie jest prawdziwa w żadnej strukturze o skończonej dziedzinie. Czy jest ona spełnialna?