Treść

Zadanie 197. *Niech R będzie relacją binarną. Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe:*

1. $RR \subseteq R$,
2. $RR = R$,
3. $RR \supseteq R$,

jeżeli relacja R jest

1. *zwrotna?*
2. *symetryczna?*
3. *przechodnia?*

Rozwiązanie

Streszczenie

Tylko dwa z dziewięciu powyższych stwierdzeń są prawdziwe. Udowodnię ich prawdziwość wprost, natomiast dla pozostałych wskażę kontrprzykłady.

1 Relacja $R \subseteq A \times A$ jest zwrotna

1.1 $RR \subseteq R$

Stwierdzenie fałszywe.

Dowód. Niech

$$R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle\}.$$

Wtedy

$$RR = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle\} \nsubseteq R.$$

□

1.2 $RR = R$

Stwierdzenie fałszywe.

Dowód. Na mocy zasady ekstensjonalności i poprzedniego dowodu:

$$RR \nsubseteq R \Rightarrow RR \neq R.$$

□

1.3 $RR \supseteq R$

Stwierdzenie prawdziwe.

Dowód. Zapis $RR \supseteq R$ jest tożsamy z zapisem $R \subseteq RR$, co zgodnie z definicją inkluzji oznacza, że:

$$\forall\langle a,b\rangle\ (\langle a,b\rangle \in R \Rightarrow \langle a,b\rangle \in RR).$$

Z definicji relacji binarnej wiemy, iż R oznacza $\{\langle a,b\rangle \mid a \in A \wedge b \in A\}$. Ponadto, z definicji złożenia mamy:

$$RR = \{\langle a,b\rangle \mid \exists c(aRc \wedge cRb)\} \subseteq A \times A.$$

Chcemy pokazać, że:

$$\forall\langle a,b\rangle\ (\langle a,b\rangle \in R \Rightarrow \langle a,b\rangle \in RR).$$

Ponieważ relacja R jest zwrotna, prawdą jest, że $\forall a \in A\ aRa$, więc jeśli weźmiemy $c = b$, to:

$$\forall\langle a,b\rangle \in R\ (aRc \wedge cRb), \text{ gdyż } \langle a,b\rangle \in R \text{ oraz } \langle b,b\rangle \in R.$$

Zatem:

$$\forall\langle a,b\rangle \in R\ (\exists c(aRc \wedge cRb)),$$

z czego wynika, że:

$$\forall\langle a,b\rangle\ (\langle a,b\rangle \in R \Rightarrow \langle a,b\rangle \in RR), \text{ co należało wykazać.}$$

□

2 Relacja $R \subseteq A \times A$ jest symetryczna

2.1 $RR \subseteq R$

Stwierdzenie fałszywe

Dowód. Niech

$$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}.$$

Wtedy

$$RR = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\} \nsubseteq R.$$

□

2.2 $RR = R$

Stwierdzenie fałszywe.

Dowód. Na mocy zasady ekstensjonalności i poprzedniego dowodu:

$$RR \nsubseteq R \Rightarrow RR \neq R.$$

□

2.3 $RR \supseteq R$

Stwierdzenie fałszywe.

Dowód. Niech

$$R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}.$$

Wtedy

$$RR = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\} \not\supseteq R.$$

□

3 Relacja $R \subseteq A \times A$ jest przechodnia

3.1 $RR \subseteq R$

Stwierdzenie prawdziwe.

Dowód. Chcemy pokazać, że (zgodnie z definicją inkluzji):

$$\forall\langle a, b\rangle\ (\langle a, b\rangle \in RR \Rightarrow \langle a, b\rangle \in R)$$

Ponadto, z definicji złożenia mamy:

$$RR = \{\langle a, b\rangle \mid \exists c(aRc \wedge cRb)\} \subseteq A \times A.$$

Natomiast z definicji przechodniości relacji wiemy, że:

$$\forall a, b, c \in A\ aRc \wedge cRb \Rightarrow aRb.$$

Jeżeli więc $\exists c(aRc \wedge cRb)$, to zachodzi również $\langle a, b\rangle \in R$, co należało wykazać. □

3.2 $RR = R$

Stwierdzenie fałszywe.

Dowód. Niech

$$R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 1, 3\rangle\}.$$

Wtedy

$$RR = \{\langle 1, 3\rangle\} \neq R.$$

□

3.3 $RR \supseteq R$

Stwierdzenie fałszywe.

Dowód. Niech

$$R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 1, 3\rangle\}.$$

Wtedy

$$RR = \{\langle 1, 3\rangle\} \not\supseteq R.$$

□