

ALGORYTMY I STRUKTURY DANYCH

IIUWr. II rok informatyki.

1. (1pkt) Ułóż, oparty o zasadę dziel i zwyciężaj, algorytm obliczający największy wspólny dzielnik dwóch liczb, który wykorzystuje następującą własność:

$$\gcd(a, b) = \begin{cases} 2\gcd(a/2, b/2) & \text{gdy } a, b \text{ są parzyste,} \\ \gcd(a, b/2) & \text{gdy } a \text{ jest nieparzyste a } b \text{ jest parzyste,} \\ \gcd((a-b)/2, b) & \text{gdy } a, b \text{ są nieparzyste} \end{cases}$$

□

Porównaj złożoność tego algorytmu z algorytmem Euklidesa.

2. (2pkt) Przeanalizuj następujący algorytm oparty na strategii dziel i zwyciężaj jednoczesnego znajdowania maksimum i minimum w zbiorze $S = \{a_1, \dots, a_n\}$:

```

Procedure MaxMin(S:set)
  if  $|S|=1$  then return  $\{a_1, a_1\}$ 
  else
    if  $|S|=2$  then return  $(\max(a_1, a_2), \min(a_1, a_2))$ 
    else
      podziel S na dwa równoliczne (z dokładnością do jednego elementu) podzbiory  $S_1, S_2$ 
       $(\max1, \min1) \leftarrow \text{MaxMin}(S_1)$ 
       $(\max2, \min2) \leftarrow \text{MaxMin}(S_2)$ 
      return  $(\max(\max1, \max2), \min(\min1, \min2))$ 

```

UWAGA: Operacja **return** $(\max(a_1, a_2), \min(a_1, a_2))$ wykonuje jedno porównanie.

- Jak pokażemy na jednym z wykładów każdy algorytm dla tego problemu, który na elementach zbioru wykonuje jedynie operacje porównania, musi wykonać co najmniej $\lceil \frac{3}{2}n - 2 \rceil$ porównania. Dla jakich danych powyższy algorytm wykonuje tyle porównań? Podaj wzorem wszystkie takie wartości.
 - Jak bardzo może różnić się liczba porównań wykonywanych przez algorytm od dolnej granicy?
 - Popraw algorytm, tak by osiągał on tę granicę dla każdej wartości n ?
3. (1pkt) Ułóż algorytm znajdujący najdłuższą ścieżkę w drzewie binarnym.
4. (2pkt) Dane jest nieukorzenione drzewo z naturalnymi wagami na krawędziach oraz liczba naturalna C . Ułóż algorytm obliczający, ile jest par wierzchołków odległych od siebie o C .
5. (2pkt) Macierz A rozmiaru $n \times n$ nazywamy macierzą Toeplitza, jeśli jej elementy spełniają równanie $A[i, j] = A[i-1, j-1]$ dla $2 \leq i, j \leq n$.
- Podaj reprezentację macierzy Toeplitza, pozwalającą dodawać dwie takie macierze w czasie $O(n)$.
 - Podaj algorytm, oparty na metodzie "dziel i zwyciężaj", mnożenia macierzy Toeplitza przez wektor. Ile operacji arytmetycznych wymaga takie mnożenie?

6. (2pkt) *Medianą* zbioru A nazywamy element $x \in A$ taki, że $|\{y \in A : y \leq x\}| = \lceil |A|/2 \rceil$. Ułóż algorytm, który dla danych uporządkowanych niemalejąco n -elementowych tablic $T1, T2, T3$ znajduje medianę zbioru $A = \{z : z = T1[i] \text{ lub } z = T2[i] \text{ lub } z = T3[i] \text{ dla pewnego } i = 1, 2, \dots, n\}$.
7. (2pkt) Jakie jest prawdopodobieństwo wygenerowania permutacji identycznościowej przez sieć Beneša-Waksmana, w której przełączniki ustawiane są losowo i niezależnie od siebie w jeden z dwóch stanów.

ZADANIA DODATKOWE - NIE BĘDĄ ROZWIĄZYWANE W CZASIE ĆWICZEŃ

1. (0 pkt) Przypomnij sobie algorytm scalający dwie posortowane tablice U i V w czasie liniowym, tj. w czasie liniowo proporcjonalnym do sumy długości tych tablic.
2. (1 pkt) Złożoność podanego na wykładzie algorytmu sortowania przez scalenia wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} T(1) &= a \\ T(n) &\leq T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + bn \quad \text{dla } n > 1 \end{aligned}$$

dla pewnych $a, b > 0$. Udowodnij, że $T(n) \in O(n \log n)$.

3. (1 pkt) Zamiast dzielić tablicę T na dwie połówki, algorytm sortowania przez scalenie mógłby dzielić ją na części o rozmiarach $\lceil n/3 \rceil$, $\lceil (n+1)/3 \rceil$ oraz $\lceil (n+2)/3 \rceil$, sortować niezależnie każdą z tych części, a następnie scalać je. Podaj bardziej formalny opis tego algorytmu i przeanalizuj czas jego działania.
4. (1pkt) Rozważ wersje algorytmu *multiply* dzielące czynniki na trzy i cztery części. Oblicz współczynniki w kombinacjach liniowych określających wartości c_i .
5. (1 pkt) Niech u i v będą liczbami o n i m cyfrach (odpowiednio). Załóżmy, że $m \leq n$. Klasyczny algorytm oblicza iloczyn tych liczb w czasie $O(mn)$. Algorytm *multiply* z wykładu potrzebuje $O(n^{\log 3})$ czasu, co jest nie do zaakceptowania gdy m jest znacznie mniejsze od n . Pokaż, że w takim przypadku można pomnożyć liczby u i v w czasie $O(nm^{\log(3/2)})$.
6. (1pkt) Udowodnij, że podana na wykładzie sieć przełączników (sieć Beneša-Waksmana) jest asymptotycznie optymalna pod względem głębokości i liczby przełączników.
7. (1pkt) Załóżmy, że przełączniki ustawiane są losowo (każdy przełącznik z jednakowym prawdopodobieństwem ustawiany jest w jeden z dwóch stanów). Sieć zbudowaną z takich przełączników można traktować jako generator losowych permutacji. Udowodnij, że nie istnieje sieć przełączników, generująca permutacje z rozkładem jednostajnym.
8. (2pkt) Przeanalizuj sieć permutacyjną omawianą na wykładzie (tzw. sieć Beneša-Waksmana)
 - Pokaż, że ostatnią warstwę przełączników sieci Beneša-Waksmana można zastąpić inną warstwą, która zawiera $n/2 - 1$ przełączników (a więc o jeden mniej niż w sieci oryginalnej) a otrzymana sieć nadal będzie umożliwiać otrzymanie wszystkich permutacji.
 - Uogólnij sieć na dowolne n (niekoniecznie będące potęgą liczby 2).

Krzysztof Loryś