

Programowanie rozszerzone

Lista zadań nr 4

Na ćwiczenia 23 i 24 marca 2010

Załóżmy, że P jest programem zawierającym przynajmniej jedną stałą. Uniwersum Herbranda U_P dla programu P nazywamy zbiór wszystkich ustalonych termów zbudowanych ze stałych i symboli funkcyjnych występujących w P . Bazą Herbranda B_P dla programu P nazywamy zbiór wszystkich ustalonych formuł atomowych zbudowanych z symboli relacyjnych występujących w P i termów z U_P .

Interpretacją Herbranda nazywamy interpretację I taką, że

- dziedziną I jest U_P
- interpretacją symbolu funkcyjnego f/n jest funkcja f_I zdefiniowana następująco:

$$f_I(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$$

- interpretacją symbolu relacyjnego p jest relacja $p_I \subseteq U_P^n$.

Ponieważ dziedzina oraz interpretacja symboli funkcyjnych jest jednakowa we wszystkich interpretacjach Herbranda, konkretna interpretacja Herbranda I jest jednoznacznie określona przez zbiór $\{A \in B_P : I \models A\}$. Modelem Herbranda nazywamy interpretację Herbranda, która jest modelem dla programu P . Najmniejszy (w sensie zawierania) model Herbranda dla programu P oznaczamy M_P .

Operatorem bezpośredniej konsekwencji nazywamy operator T_P , który przekształca interpretację Herbranda w interpretację Herbranda (rozumiane jako podzbiory B_P) i jest zdefiniowany następująco:

$$T_P(I) = \{A_0 \mid A_0 \leftarrow A_1, \dots, A_m \in \text{ground}(P) \text{ oraz } \{A_1, \dots, A_m\} \subseteq I\}$$

przy czym $\text{ground}(P)$ jest zbiorem wszystkich ustalonych instancji klauzul z P .

Definiujemy również następujący nieskończony ciąg interpretacji oraz jego sumę:

$$\begin{aligned} T_P \uparrow 0 &= \emptyset \\ T_P \uparrow (i+1) &= T_P(T_P \uparrow i) \\ T_P \uparrow \omega &= \bigcup_{i=0}^{\infty} T_P \uparrow i \end{aligned}$$

Więcej na temat podstawowych pojęć teorii modeli Herbranda można dowiedzieć się z podręcznika Nilssona i Małuszyńskiego *Logic, Programming and Prolog*, str. 24-30.

Zadanie 1 (2 pkt). Niech P będzie programem a M_P jego najmniejszym modelem Herbranda. Pokaż, że M_P jest najmniejszą interpretacją Herbranda I programu P spełniającą równość $T_P(I) = I$. Wywnioskuj z tego, że $M_P = T_P \uparrow \omega$.

Zadanie 2 (2 pkt). Rozważmy następujący program P :

$$\begin{aligned}p(s(X), Y, s(Z)) &\leftarrow p(X, Y, Z). \\p(z, X, X). \\q(s(X), Y, Z) &\leftarrow q(X, Y, U), p(Y, U, Z). \\q(z, X, z).\end{aligned}$$

1. Podaj uniwersum Herbranda U_P , bazę Herbranda B_P oraz przykłady interpretacji Herbranda dla programu P .
2. Używając operatora T_P wyznacz najmniejszy model Herbranda M_P dla programu P .

Zadanie 3 (2 pkt). 1. Podaj przykład programów P_1 i P_2 takich, że $M_{P_1} = \emptyset$ oraz $M_{P_2} = B_{P_2}$.

2. Załóżmy, że M_1 i M_2 są modelami Herbranda dla programu P . Czy $M_1 \cap M_2$ oraz $M_1 \cup M_2$ również są modelami programu P ? W każdym z tych przypadków podaj dowód albo kontrprzykład.