

# Sto łatwych zadań z języków formalnych i złożoności obliczeniowej

przygotował Jerzy Marcinkowski  
jako materiał do kursu prowadzonego  
w Instytucie Informatyki UWr  
wiosną roku 2007

## 1 Deterministyczne Automaty Skończone

**Zadanie 1.** Rozważmy język  $L = \{w0s : |s| = 9\}$ , złożony z tych słów których dziesiąty symbol od końca to 0. Udowodnij że DFA rozpoznający ten język ma co najmniej 1024 stany.

**Zadanie 2.** udowodnij, że język  $L = \{a^n b^{2^n} : n \in \mathcal{N}\}$  nie jest regularny.

**Zadanie 3.** Udowodnij że zbiór  $L$  tych słów nad alfabetem  $\{0, 1\}$  które są zapisem binarnym liczby pierwszej nie jest regularny.

**Zadanie 4.** (za 2 punkty) Niech  $L$  będzie dowolnym podzbiorem  $0^*$ . Udowodnij, że  $L^*$  jest językiem regularnym.

**Definicja** Dla danego słowa  $w$ , nad pewnym ustalonym alfabetem, niech  $w^R$  oznacza "w czytane od końca" (tzn.  $\varepsilon^R = \varepsilon$  i  $(aw)^R = w^R a$  jeśli  $a$  należy do alfabetu a  $w$  jest dowolnym słowem).

**Zadanie 5.** Czy język  $\{ww^R x : w, x \in \{0, 1\}^* \text{ i } w, x \neq \varepsilon\}$  jest regularny ?  
Czy język  $\{xwx : w, x \in \{0, 1\}^* \text{ i } x \neq \varepsilon\}$  jest regularny ?

**Zadanie 6.** Niech  $L \subset \mathcal{A}^*$ . Relację  $\sim_L \subset \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^*$  definiujemy w sposób następujący:  $w \sim_L w'$  w.t.w. gdy  $\forall v \in \mathcal{A}^* \quad wv \in L \Leftrightarrow w'v \in L$ . Udowodnij następujące *Twierdzenie o indeksie*:  $L$  jest regularny wtedy i tylko wtedy gdy liczba klas abstrakcji relacji  $\sim_L$  jest skończona. Minimalna ilość stanów DFA rozpoznającego  $L$  jest wtedy równa liczbie tych klas abstrakcji.

**Zadanie 7.** Jaką minimalną liczbę stanów musi mieć deterministyczny automat skończony rozpoznający zbiór tych wszystkich słów nad alfabetem  $\{a, b, c\}$ , które wśród ostatnich trzech znaków mają po jednym wystąpieniu każdej z liter alfabetu?

**Zadanie 8.** Jaką minimalną liczbę stanów musi mieć deterministyczny automat skończony, rozpoznający język tych słów nad alfabetem  $\{a, b, c\}$ , które mają przynajmniej 4 symbole, i których ostatnie 4 symbole są jednakowe?

**Zadanie 9.** Jaką minimalną liczbę stanów musi mieć deterministyczny automat skończony, rozpoznający język tych słów nad alfabetem zerojedynekowym, które wśród czterech ostatnich symboli mają dokładnie dwie jedynki (słowo 010 ma jedną jedynkę wśród czterech ostatnich symboli)?

**Zadanie 10.** Rozważmy alfabet  $A_n$  składający się z liter  $a, b_1, b_2, \dots, b_n$ . Niech język  $L_n^1$  składa się z tych słów nad  $A_n$ , które mają parzystą ilość wystąpień wzorca  $b_1b_2$ , niech język  $L_n^2$  składa się z tych słów nad  $A_n$ , które mają parzystą ilość wystąpień wzorca  $b_2b_3$ , i tak dalej. Niech wreszcie język  $L_n^n$  składa się z tych słów nad  $A_n$ , które mają parzystą ilość wystąpień wzorca  $b_nb_1$ . Zdefiniujmy język  $L_n$  jako przecięcie  $L_n^1 \cap L_n^2 \cap \dots \cap L_n^n$ . Jaka minimalną ilość stanów musi mieć deterministyczny automat skończony rozpoznający  $L_n$ ?

**Zadanie 11.** Przez DFA ze stacją benzynową będziemy w tym zadaniu rozumieć zwykły deterministyczny automat skończony wraz z jednym dodatkowym wyróżnionym stanem  $q_{BP}$  i liczbą naturalną  $b$ . Powiemy że DFA ze stacją benzynową  $M$  akceptuje słowo wejściowe  $w$ , jeśli  $M$  akceptuje  $w$  w zwykłym sensie, a spośród każdych  $b$  kolejnych stanów napotkanych w czasie wczytywania  $w$  przez  $M$  przynajmniej jeden jest stanem  $q_{BP}$ . Udowodnij, że nie każdy język regularny może być rozpoznany przez jakiś DFA ze stacją benzynową.

## 2 Wyrażenia regularne

**Zadanie 12.** Skonstruuj automat skończony rozpoznający i wyrażenie regularne definiujące nad alfabetem  $\{1, 0\}$  język słów, które zawierają tyle samo jedynek co zer i w których każdym prefiksie ilość zer różni się co najwyżej o dwa od ilości jedynek.

**Zadanie 13.** Skonstruuj automat skończony rozpoznający i wyrażenie regularne definiujące nad alfabetem  $\{a, b\}$  język słów które nie zawierają wzorca  $baba$ .

**Zadanie 14.** Dodanie do definicji wyrażeń regularnych pozwolenia na użycie symbolu  $\cap$ , oznaczającego przekrój języków nie umożliwia reprezentowania nowych zbiorów, wyrażenia jednak stają się krótsze.

Udowodnij że użycie  $\cap$  może wykładniczo skrócić wyrażenie.

*Wskazówka: rozważycj język składający się z jednego słowa  $(\dots(a_0a_1)^2a_2)^2\dots)^2$*

**Zadanie 15.** Skonstruuj automat skończony rozpoznający i wyrażenie regularne definiujące nad alfabetem  $\{a, b, c, d\}$  język słów które zawierają tyle samo symboli  $a$  co  $b$ , tyle samo symboli  $c$  co  $d$ , i w których każdym prefiksie ilość symboli  $a$  różni się co najwyżej o jeden od ilości symboli  $b$  zaś ilość symboli  $c$  różni się co najwyżej o jeden od ilości symboli  $d$ .

Niech  $\phi$  będzie wyrażeniem regularnym nad alfabetem  $\mathcal{A}$ , a  $w$  słowem nad tym alfabetem. Niech  $f$  będzie funkcją, której argumentami są wystąpienia liter alfabetu w słowie  $w$  (czyli "kolejne litery słowa  $w$ "), a wartościami są wystąpienia liter w wyrażeniu  $\phi$ . Powiemy, że  $f$  jest **poprawnym mapowaniem**  $w$  na  $\phi$ , jeśli zachodzi któryś z warunków:

1.  $\phi$  jest słowem nad  $\mathcal{A}$ ,  $\phi = w$  i  $f$  jest identycznością, lub  $\phi = \varepsilon$  i  $w$  jest puste;
2.  $\phi = \phi_1 + \phi_2$  i  $f$  jest poprawnym mapowaniem  $w$  na  $\phi_1$  lub  $f$  jest poprawnym mapowaniem  $w$  na  $\phi_2$ ;
3.  $\phi = \phi_1\phi_2$ ,  $w = w_1w_2$  i  $f$  ograniczona do  $w_1$  jest poprawnym mapowaniem tego słowa na  $\phi_1$ , zaś  $f$  ograniczona do  $w_2$  jest poprawnym mapowaniem tego słowa na  $\phi_2$ ;
4.  $\phi = \psi^*$ ,  $w = w_1w_2\dots w_k$ , dla jakiegoś  $k \geq 0$  i dla każdego  $1 \leq i \leq k$  funkcja  $f$  ograniczona do  $w_i$  jest poprawnym mapowaniem  $w_i$  na  $\psi$ .

Intuicja jest taka, że poprawne mapowanie słowa przyporządkowuje każdej jego literze, literę wyrażenia z której ta litera słowa "się wzięła". Wyrażenie  $\phi$  jest **deterministycznym wyrażeniem regularnym**, jeśli dla każdego  $w \in L_\phi$  istnieje dokładnie jedno poprawne

mapowanie  $w$  na  $\phi$ . Deterministyczne wyrażenie regularne pozwala odczytać, które litery w słowie biorą się z których liter w wyrażeniu, ale to odczytanie następuje dopiero, gdy znamy całe słowo. Inaczej jest dla deterministycznych on-line wyrażań regularnych. Wyrażenie regularne  $\phi$  jest **deterministyczne on-line**, jeśli dla każdego słów  $ww_1, ww_2 \in L_\phi$  i każdego funkcji  $f_1, f_2$ , będących poprawnymi mapowaniami słów (odpowiednio)  $ww_1$  i  $ww_2$  na  $\phi$ , funkcje  $f_1$  i  $f_2$  zgadzają się na prefiksie  $w$ .

*UWAGA: deterministic regular expressions, znane również jako unambiguous regular expression pojawiają się w definicji standardu XML.*

**Zadanie 16. A.** Które z poniższych wyrażań są deterministyczne a które są deterministyczne on-line?

i.  $0^*10^* + 0^*$     ii.  $(0 + 1)^*1(0 + 1)$     iii.  $(0 + 1)(0 + 2)^* + (1 + 2)(0 + 1)^* + (0 + 2)(1 + 2)^*$

**B.** Znajdź deterministyczne wyrażenie regularne oznaczające język tych wszystkich słów nad alfabetem zerojedynkowym, które zawierają wzorec 101.

**Zadanie 17.** Czy dla każdego języka regularnego istnieje deterministyczne on-line wyrażenie regularne, które go definiuje?

**Zadanie 18.** Znajdź deterministyczne on-line wyrażenie regularne oznaczające język tych wszystkich słów nad alfabetem zerojedynkowym, które zawierają jedną lub dwie jedynki.

### 3 Niedeterministyczne Automaty Skończone

**Zadanie 19.** Skonstruuj niedeterministyczny automat skończony rozpoznający język tych słów nad  $\{0, 1\}^*$  które jako liczba w systemie dwójkowym dzielą się przez 5, przy czym liczba jest wczytywana

- a) począwszy od najbardziej znaczącego bitu,
- b) począwszy od najmniej znaczącego bitu.

**Zadanie 20.** Udowodnij że jeśli dla pewnego języka  $L$  istnieje rozpoznający go N DFA, to istnieje również N DFA rozpoznający język  $L^R = \{w : w^R \in L\}$ .

**Zadanie 21.** Wiadomo że  $L$  językiem regularnym. Pokaż, że język

$$\{w : \exists n \in \mathcal{N} \exists v \in L \ w^n = v\}$$

jest językiem regularnym. Przez  $w^n$  rozumiemy tu słowo  $w$  skonkatelowane ze sobą  $n$  razy.

**Zadanie 22.** Udowodnij, że jeśli  $L_1$  i  $L_2$  są językami regularnymi nad pewnym alfabetem  $\mathcal{A}$  to również języki  $L_1 \cup L_2$ ,  $L_1 \cap L_2$  i  $\mathcal{A}^* - L_1$  są językami regularnymi.

**Zadanie 23.** (za 2 punkty)

Założmy że  $L$  jest pewnym językiem regularnym.

Czy język  $L/2 = \{w : \exists v \ vw \in L \wedge |v| = |w|\}$  jest regularny ?

**Zadanie 24.** Podaj algorytm rozstrzygający, dla danych dwóch niedeterministycznych automatów skończonych, czy języki rozpoznawane przez te automaty są równe.

**Zadanie 25.** Minimalny DFA rozpoznający język  $L$  ma zawsze tyle samo stanów co minimalny DFA rozpoznający dopełnienie  $L$ . Stwierdzenie to przestaje być prawdziwe, jeśli rozważamy automaty niedeterministyczne. Udowodnij, że istnieje język  $L$  który daje się rozpoznać N DFA o mniej niż 20 stanach, ale którego dopełnienie nie daje się rozpoznać żadnym N DFA o mniej niż 200 stanach. *Wskazówka: wystarczy rozważać alfabet jednoelementowy.*

**Zadanie 26.** Czy istnieje wyrażenie regularne  $\phi$ , takie że  $L_{a\phi} = L_{\phi b}$ ? Czy istnieje wyrażenie regularne  $\phi$ , takie że  $L_{a^*\phi} = L_{\phi b^*}$ ?

**Zadanie 27.** Przez *N DFA ze stacją benzynową* będziemy w tym zadaniu rozumieć zwykły niedeterministyczny automat skończony, wraz z jednym dodatkowym wyróżnionym stanem  $q_{BP}$  i liczbą naturalną  $b$ . Powiemy że N DFA ze stacją benzynową  $M$  akceptuje słowo wejściowe  $w$ , jeśli istnieje taka ścieżka akceptująca słowo  $w$  w  $M$  w zwykłym sensie, że spośród każdych  $b$  kolejnych stanów na tej ścieżce, przynajmniej jeden jest stanem  $q_{BP}$ . Udowodnij, że nie każdy język regularny może być rozpoznany przez jakiś N DFA ze stacją benzynową.

## 4 Gramatyki bezkontekstowe i automaty ze stosem

**Zadanie 28.** Zbuduj automat ze stosem rozpoznający język *dobrze rozstawionych nawiasów dwóch rodzajów* generowany przez gramatykę:

$$S \rightarrow SS|(S)|[S]|\varepsilon$$

Która ma jeden symbol nieterminalny  $S$  i cztery symbole terminalne  $(, ), [, ]$ .

**Zadanie 29.** Zbuduj gramatykę bezkontekstową generującą język:  $\{w \in \{0, 1\}^* : |w|_0 = 2|w|_1 \wedge 2||w|_1\}$ .

**Zadanie 30.** Czy język  $\{w \in \{0, 1\}^* : \exists n \in \mathcal{N} \quad 2n|w|_0 \leq |w|_1 \leq (2n + 1)|w|_0\}$  jest bezkontekstowy?

**Zadanie 31.** Podaj algorytm rozstrzygający, dla danej gramatyki bezkontekstowej  $G$ , czy  $L(G)$  jest niepusty.

**Zadanie 32.** Niech  $G$  będzie gramatyką generującą poprawnie zbudowane formuły rachunku zdań ze zmiennymi zdaniowymi  $p$  i  $q$ . Symbolami terminalnymi  $G$  są  $p, q, (, ), \neg$  i  $\Rightarrow$  a produkcjami

$$S \rightarrow \neg S|(S \Rightarrow S)|p|q$$

Znajdź gramatykę w postaci normalnej Chomsky'ego generującą ten sam język.

**Zadanie 33.** Czy istnieje gramatyka bezkontekstowa generująca zbiór tych słów nad alfabetem zerojedynkowym, które nie są postaci  $vww$  dla żadnych słów  $w, v$  takich, że  $|v| = |w|$ ?

**Zadanie 34.** Czy język  $L$  złożony z tych wszystkich słów nad alfabetem  $\{0, 1\}$  które są postaci  $vww$ , dla pewnych słów  $w, v$ , takich, że  $|w| = |v|$ , jest bezkontekstowy?

**Zadanie 35.** Czy język  $\bar{L}$  będący dopełnieniem języka  $L$  z poprzedniego zadania do  $\{0, 1\}^*$  jest bezkontekstowy?

**Zadanie 36.** Czy język

$$L_3 = \{w \in \{0, 1, 2\}^* : \neg \exists x \in \{0, 1, 2\}^* \quad w = xx\}$$

jest bezkontekstowy?

**Zadanie 37.** Czy dopełnienie języka  $L_3$ , język

$$L_4 = \{w \in \{0, 1, 2\}^* : \exists x \in \{0, 1, 2\}^* w = xx\}$$

jest bezkontekstowy? *Wskazówka.* (1) Rozważ język  $L_4 \cap L$  gdzie  $L = L_{0^*10^*10^*10^*1}$ . (2) Skorzystaj z lematu o pompowaniu, pamiętaj że podział  $w = xyztr$  którego istnienie postuluje lemat jest taki, że  $|yzt| \leq c$ , gdzie  $c$  jest stałą z lematu.

**Zadanie 38.** Zbuduj NDPDA i gramatykę bezkontekstową dla języka  $\{0, 1\}^* - \{www : w \in \{0, 1\}^*\}$ .

**Zadanie 39.** Czy język:  $\{vww : v, w \in \{a, b, c\}^*, w \neq \varepsilon\}$  jest bezkontekstowy?

**Zadanie 40.** Czy język  $\{w \in \{0, 1\}^* : |w|_0 \leq |w|_1 \leq 2|w|_0\}$  jest bezkontekstowy?

**Zadanie 41.** Niech  $L_0$  będzie językiem tych słów nad alfabetem zerojedynkowym, które mają tyle samo zer co jedynek, a  $L_R$  niech będzie językiem wszystkich palindromów. Czy przekrój  $L_0$  z dopełnieniem  $L_R$  jest językiem bezkontekstowym? (mamy tu na myśli dopełnienie do  $\{0, 1\}^*$ )

**Zadanie 42.** Niech  $L_0$  będzie językiem tych słów nad alfabetem zerojedynkowym, które mają tyle samo zer co jedynek, a  $L_R$  niech będzie językiem wszystkich palindromów. Czy przekrój  $L_0$  z  $L_R$  jest językiem bezkontekstowym?

## 5 Zbiory i funkcje rekurencyjne

**Zadanie 43.** Rozszerz definicję zbioru rekurencyjnego tak aby można było rozważać rekurencyjne zbiory par liczb naturalnych i udowodnij, że jeśli zbiór  $A \subset \mathcal{N}^2$  jest rekurencyjny to zbiór  $\{n : \exists m [n, m] \in A\}$ , czyli rzut  $A$  na pierwszą oś, jest zbiorem rekurencyjnie przeliczalnym.

**Zadanie 44.** Pokaż, że każdy zbiór rekurencyjnie przeliczalny jest rzutem pewnego zbioru rekurencyjnego, to znaczy jeśli  $B$  jest r.e. to istnieje taki rekurencyjny  $A \subset \mathcal{N}^2$  rekurencyjny, że  $B = \{n : \exists m [n, m] \in A\}$ .

**Zadanie 45.** Powtórz podany na wykładzie dowód nierozstrzygalności problemu stopu, to znaczy faktu, że zbiór  $K = \{n : \phi_n(n) \in \mathcal{N}\}$  nie jest rekurencyjny.

**Zadanie 46.** Pokaż, że  $\{n : |Dom(\phi_n)| \geq 7\}$  jest rekurencyjnie przeliczalny.

**Zadanie 47.** Udowodnij, że jeśli  $\phi$  jest niemalejącą całkowitą funkcją rekurencyjną to zbiór  $\phi(\mathcal{N})$  jej wartości jest rekurencyjny. Czy pozostaje to prawdą bez założenia o całkowitości  $\phi$ ?

**Zadanie 48.** Udowodnij, że każdy niepusty zbiór rekurencyjnie przeliczalny jest postaci  $\phi(\mathcal{N})$  dla pewnej całkowitej funkcji rekurencyjnej  $\phi$ .

**Zadanie 49.** Udowodnij, że każdy nieskończony zbiór rekurencyjnie przeliczalny jest postaci  $\phi(\mathcal{N})$  dla pewnej całkowitej różnowartościowej funkcji rekurencyjnej  $\phi$ .

**Zadanie 50.** Udowodnij, że zbiór  $\{n : Dom(\phi_n) = \mathcal{N}\}$  nie jest rekurencyjnie przeliczalny.

**Zadanie 51.** (długie, więc za 2 punkty)

Założmy, że  $f$  jest funkcją rekurencyjną całkowitą. Które z poniższych implikacji są prawdziwe?

- (i) jeśli  $A$  jest rekurencyjny to  $f(A)$  też;
- (ii) jeśli  $A$  jest rekurencyjny to  $f^{-1}(A)$  też;
- (iii) jeśli  $A$  jest r.e. to  $f(A)$  też;
- (iii) jeśli  $A$  jest r.e. to  $f^{-1}(A)$  też;

Co zmieni się, jeśli założymy, że  $f$  jest funkcją częściową ?

**Zadanie 52.** Nie korzystając z tw. Rice'a udowodnij, że zbiór  $B = \{n : Dom(\phi_n) \text{ i } \mathcal{N} - Dom(\phi_n) \text{ są nieskończone}\}$  nie jest rekurencyjny.

**Zadanie 53.** Udowodnij, że zbiór  $B = \{n : Dom(\phi_n) \text{ i } \mathcal{N} - Dom(\phi_n) \text{ są nieskończone}\}$  z poprzedniego zadania nie jest nawet rekurencyjnie przeliczalny.

**Zadanie 54.** Niech  $A, B, C, D$  będą zbiorami rekurencyjnie przeliczalnymi, takimi że każda liczba naturalna należy do dokładnie dwóch z nich. Udowodnij że w takim razie wszystkie te cztery zbiory są rekurencyjne.

**Zadanie 55.** Udowodnij, że zbiór numerów tych programów które zatrzymują się dla wszystkich argumentów oprócz co najwyżej skończonej ilości, nie jest rekurencyjnie przeliczalny.

**Zadanie 56.** Udowodnij podane na wykładzie twierdzenie Rice'a.

**Zadanie 57.** Poniższe zbiory nie są rozstrzygalne:

1. zbiór numerów tych maszyn Turinga które obliczają funkcje o dziedzinie różnej od  $\mathcal{N}$ ;
2. zbiór numerów tych maszyn Turinga które obliczają funkcję całkowitą i których czas działania jest rosnący względem rozmiaru danych;
3. zbiór numerów tych maszyn Turinga których czas działania dla żadnych danych jest nie liczbą pierwszą;
4. zbiór numerów tych maszyn Turinga które obliczają funkcje częściowe, których wartościami są wyłącznie liczby pierwsze;

Nierozstrzygalność których z nich daje się udowodnić wprost z twierdzenia Rice'a?

**Zadanie 58.** Udowodnij nierozstrzygalność zbioru z punktu 2. poprzedniego zadania.

**Zadanie 59.** Niech  $A, B \subset \mathcal{N}$ . Mówimy, że  $A \leq_{rek} B$  jeśli istnieje całkowita funkcja rekurencyjna  $f$  (zwana redukcją) taka że  $f(x) \in B$  wtedy i tylko wtedy gdy  $x \in A$ . Pokaż, że dla każdych dwóch zbiorów  $A, B \subset \mathcal{N}$  istnieje ich najmniejsze ograniczenie górne w sensie  $<_{rek}$ , to znaczy taki zbiór  $C$ , że:

- (i)  $A \leq_{rek} C$  i  $B \leq_{rek} C$ ,
- (ii) jeśli  $D$  jest taki, że  $A \leq_{rek} D$  i  $B \leq_{rek} D$  to  $C \leq_{rek} D$ .

**Zadanie 60.** (za 2 punkty)  
Czy  $K \leq_{rek} \bar{K}$ ? Czy  $\bar{K} \leq_{rek} K$ ?

**Zadanie 61.** Pokaż, że zbiór:  
 $\{n : \phi_n \text{ zatrzymuje się dla wszystkich danych po czasie mniejszym niż dwukrotna długość danych}\}$   
nie jest rekurencyjny. Czy można do tego użyć tw. Rice'a?

**Zadanie 62.** Niech  $T$  będzie zbiorem tych par liczb  $\langle n, m \rangle$  dla których  $\phi_m$  i  $\phi_n$  to ta sama funkcja częściowa.

- Pokaż, że  $T$  nie jest rekurencyjnie przeliczalny.
- Czy dopełnienie zbioru  $T$  jest rekurencyjnie przeliczalne?

## 6 Maszyny Turinga

**Zadanie 63.** Udowodnij, że zastąpienie w definicji maszyny Turinga taśmy nieskończoną płaszczyzną nie zmieni klasy funkcji obliczalnych (w tym i następujących zadaniach należy dość dokładnie podać ideę konstrukcji, ale nie wymagam napisania odpowiedniego kompilatora).

**Zadanie 64.** Skonstruuj maszynę Turinga rozpoznającą język  $\{ww^R : w \in \{0, 1\}^*\}$ .

**Zadanie 65.** Skonstruuj dwutaśmową maszynę Turinga która mając jako dane na jednej taśmie pewne słowo  $w$  zaś na drugiej taśmie słowo  $v$  postaci

$$\#q_{i_1} a_1 q'_{i_1} a'_1 D_1 \#q_{i_2} a_2 q'_{i_2} a'_2 D_2 \# \dots \#q_{i_n} a_n q'_{i_n} a'_n D_n \#q_0 \#q_F$$

(gdzie każde  $D_i$  jest albo  $R$  albo  $L$ ) zwróci rezultat 1 wtedy i tylko wtedy gdy jedno-taśmowa maszyna której ciągiem instrukcji jest słowo  $v$  (stanem początkowym jest  $q_0$  a końcowym  $q_F$ ) zwróci rezultat 1.

**Zadanie 66.** (za 2 punkty) Zauważ, że maszyna podobna do dwukierunkowego automatu ze stosem, lecz posiadająca dwa stosy, potrafi rozpoznać te same języki co maszyna Turinga. Udowodnij, że pozostaje to prawdą jeśli dysponujemy tylko jednym symbolem stosowym (oprócz symbolu dna stosu). Maszynę taką nazywamy *maszyną z dwoma licznikami*. *Wskazówka: najpierw udowodnij, że wystarczą cztery liczniki, potem spróbuj zakodować ich stan przy pomocy jednego licznika, drugiego będziesz mógł/mogła użyć do manipulowania pierwszym.*

## 7 Nierozstrzygalność

**Zadanie 67.** Czy istnieje algorytm rozstrzygający, dla danej gramatyki bezkontekstowej  $G$ , czy istnieje słowo  $w$ , takie że  $ww^R w \in L(G)$ ?

**Zadanie 68.** Powtórz podany na wykładzie dowód nierozstrzygalności Problemu Odpowiedniości Posta.

**Zadanie 69.** Dla gramatyki bezkontekstowej  $G$  niech  $L_G$  oznacza generowany przez nią język. Skorzystaj z nierozstrzygalności problemu odpowiedniości Posta aby pokazać, że zbiór tych par gramatyk  $G, H$  dla których zachodzi  $L_G \cap L_H \neq \emptyset$  nie jest rekurencyjny. Czy jest on rekurencyjnie przeliczalny?

**Zadanie 70.** (za 2 punkty)

Udowodnij, że nie istnieje algorytm rozstrzygający, dla danej gramatyki bezkontekstowej  $G$  i alfabetu  $A$ , czy  $A^* = L(G)$ .

**Zadanie 71.** Czy istnieje algorytm rozstrzygający, dla danych dwóch gramatyk bezkontekstowych  $G$  i  $H$ , czy  $L(G) = L(H)$ ?

**Zadanie 72.** Jak każdy pamięta, deterministyczny automat ze stosem, to urządzenie zadane przez skończony zbiór instrukcji w formacie: *jeśli widzisz na taśmie wejściowej  $a$ , jesteś w stanie  $q$ , a z czubka stosu zdjąłeś  $b$ , to przejdź do stanu  $q'$ , a na czubek stosu włóż słowo  $w$ .* Taki automat czyta słowo wejściowe literka po literce, zmieniając przy tym stan jak zwykły automat skończony, a do tego jeszcze buduje sobie stos. Czy istnieje algorytm odpowiadający, dla danych dwóch deterministycznych automatów ze stosem, czy istnieje niepuste słowo wejściowe, po przeczytaniu którego oba te automaty będą miały na swoich stosach takie same ciągi symboli?

**Zadanie 73.** Dla danych funkcji  $f, g, h : \{0, 1, \dots, p\} \rightarrow \{0, 1, \dots, p\}$ , i danego nieskończonego ciągu liczb naturalnych  $(a_1, a_2, a_3 \dots)$ , niech  $F_{f,g,h}(a_1, a_2, \dots)$  będzie ciągiem liczb naturalnych którego  $i$ -ty element jest równy  $f(a_{i-1}) +_p g(a_i) +_p h(a_{i+1})$ , gdzie  $+_p$  oznacza dodawanie modulo  $p$  (przyjmujemy, że  $a_0 = 0$ ).

Udowodnij, że problem:

dane funkcje  $f, g$  i  $h$ , oraz skończone ciągi  $(b_1, b_2, \dots, b_k)$  i  $(c_1, c_2, \dots, c_l)$ . Czy istnieje liczba iteracji  $n$  taka, że  $F_{f,g,h}^n(b_1, b_2, \dots, b_k, 0, 0, 0 \dots) = (c_1, c_2, \dots, c_l, 0, 0, 0 \dots)$  jest nierozstrzygalny.

**Zadanie 74.** Powiemy, że semiproces Thuego  $\Pi$ , jest bezkontekstowy jeśli dla każdej pary  $[w, v] \in \Pi$  słowo  $w$  składa się z jednej litery a słowo  $v$  jest niepuste. Czy problem słów dla bezkontekstowych semiprocesów Thuego jest rozstrzygalny?

**Zadanie 75.** Powiemy, że semiproces Thuego  $\Pi$ , jest prawie bezkontekstowy jeśli dla każdej pary  $[w, v] \in \Pi$  jedno ze słów  $w$  i  $v$  składa się tylko z jednej litery, drugie zaś z dwóch liter. Czy problem słów dla prawie bezkontekstowych semiprocesów Thuego jest rozstrzygalny?  
*Uwaga. Użyta w tym i poprzednim zadaniu nomenklatura wymyślona została tylko by wygodniej było sformułować te zadania, i nie ma nic wspólnego z żadnym standardem*

**Zadanie 76.** (za 2 punkty)

Udowodnij nierozstrzygalność problemu sprawdzenia dla danego procesu Thuego  $\Pi$  i słowa  $w$  czy zbiór  $A_w = \{v : w \xrightarrow{\Pi} v\}$  jest skończony.

*Wskazówka:* Rozważ maszyny Turinga z dodanym gdzieś na taśmie licznikiem, który jest zwiększany o jeden przy każdym ruchu wykonywanym przez maszynę. Naśladuj dowód nierozstrzygalności problemu słów.

**Zadanie 77.** (za 2 punkty) Rozpatrzmy skończony zbiór par słów  $P$  i binarną relację  $\rightarrow$  na słowach zdefiniowaną jak następuje:  $w \rightarrow_P v$  wtedy i tylko wtedy gdy istnieje para  $\langle a, b \rangle \in P$  taka że  $w = ax$  i  $v = xb$  gdzie  $x$  jest pewnym słowem. Niech  $\xrightarrow{*}_P$  będzie przechodnim domknięciem  $\rightarrow_P$  (to znaczy najmniejszą relacją przechodnią zawierającą  $\rightarrow_P$ ).

Czy problem: dane  $P, x, y$ , czy  $x \xrightarrow{*}_P y$  ? jest rozstrzygalny?



**Zadanie 78.** Czy istnieje algorytm który, dla danej gramatyki bezkontekstowej  $G$  o alfabecie symboli terminalnych składającym się z zera, jedynki i dwójki, rozstrzyga czy w  $L(G)$  istnieje palindrom mający tyle samo wystąpień symbolu 0 co symbolu 1?

**Zadanie 79.** (trudne, za 2 punkty)

Funkcję  $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$  nazywamy funkcją Conway'a jeśli istnieją liczby naturalne  $p, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_p, b_p$  takie że dla każdego  $n$  jeśli  $n = k \bmod p$  to  $f(n) = na_k/b_k$ . Pokaż, że nie ma algorytmu który dla danych  $p, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_p, b_p$  odpowiadałby, czy dla definiowanej przez te współczynniki funkcji Conway'a istnieje  $m$  takie, że  $f^m(2) = 1$ , gdzie  $f^m$  oznacza funkcję  $f$  złożoną  $m$  razy ze sobą.

**Zadanie 80.** (za 2 punkty)

Udowodnij nierozstrzygalność następującego problemu: dany jest skończony zbiór kolorów  $C$ , zawierający co najmniej kolory: czerwony i biały, oraz zbiór  $N \subseteq C^4$  czwórek kolorów, uznanych za *nieestetyczne*. Mamy nieskończenie wiele kwadratowych kafelków każdego koloru o boku długości 1. Czy istnieje kwadrat (o całkowitych wymiarach i boku nie mniejszym niż 2), który można wypełnić kafelkami w taki sposób, by w lewym dolnym i w lewym górnym narożniku znalazł się czerwony kafelek, pozostałe kafelki dolnego i górnego brzegu były białe, oraz by w całym kwadracie nie pojawiła się nieestetyczna sekwencja kafelków, tj. cztery sąsiadujące kafelki:

$c_1$	$c_2$
$c_3$	$c_4$

takie że  $(c_1, c_2, c_3, c_4) \in N$ .

**Zadanie 81.** Automat *niedeterministycznie ruszający dwiema nogami* zdefiniujemy sobie jako piątkę  $\langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$ , gdzie  $\Sigma$  jest skończonym alfabetem,  $Q$  skończonym zbiorem stanów,  $q_0 \in Q$  jest stanem początkowym,  $F \subseteq Q$  jest zbiorem stanów akceptujących a  $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times \Sigma \times Q \times \{0, 1\} \times \{0, 1\}$  jest relacją przejścia.

Relacja przejścia jest rozumiana następująco: jeśli  $\delta(q, a_1, a_2, q', b_1, b_2)$ , to gdy automat jest w stanie  $q$ , lewą nogę ma na symbolu  $a_1$  a prawą nogę na symbolu  $a_2$ , to może przejść do stanu  $q'$ , przesunąć lewą nogę o  $b_1$  symboli w prawo i przesunąć prawą nogę o  $b_2$  symboli w prawo.

Automat rozpoznaje pary słów  $w_l, w_p$ , z których każde jest postaci  $a(\Sigma \setminus \{a, z\})^*z$ , dla pewnych ustalonych symboli  $a, z \in \Sigma$

Na początku działania automat jest w stanie  $q_0$  i ma lewą nogę na pierwszej literze (czyli  $a$ ) słowa  $w_l$ , a prawą na pierwszej literze (czyli  $a$ ) słowa  $w_p$ . Automat akceptuje parę słów, jeśli możliwe jest aby znalazł się obiema nogami na literach  $z$  i przeszedł wtedy w stan  $q \in F$ .

Czy problem totalności automatu niedeterministycznie ruszającego dwiema nogami jest rozstrzygalny? Przez problem totalności rozumiemy tu dopełnienie problemu istnienia jakiegokolwiek pary słów, o podanej powyżej postaci, ale nie akceptowanej przez dany automat.

## 8 Niedeterministyczne maszyny Turinga i klasa NP

**Zadanie 82.** Pokaż, że wielomianową maszynę niedeterministyczną można przerobić tak, aby zgadywała rozwiązanie wcześniej niż pozna dane. Dokładniej rzecz ujmując, udowodnij, że jeśli zbiór  $A$  należy do klasy  $\mathcal{NP}$  to istnieją wielomiany  $p, q$  oraz niedeterministyczna maszyna Turinga  $M$  rozpoznająca  $A$  działająca, dla danego  $n$  w następujący sposób:  $M$  wyznacza na taśmie blok klatek o długości  $p(|n|)$ , (zatem interesuje ją wielkość  $n$ , ale nie jego dokładna wartość) po czym niedeterministycznie i nie czytając  $n$  zapełnia ten blok ciągiem zer i jedynek. Dopiero następnie czyta  $n$  i przechodzi do fazy w której obliczenie jest już deterministyczne i nie zabiera więcej niż  $q(|n|)$  kroków.

**Zadanie 83.** Pokaż, że jeśli zbiór  $A \subset \mathcal{N}^2$  jest w  $\mathcal{P}$  i  $p$  jest wielomianem to zbiór  $\{n : \exists m |m| \leq p(|n|) \text{ i } [n, m] \in A\}$ , czyli rodzaj rzutu  $A$  na pierwszą oś, jest w  $\mathcal{NP}$ .

**Zadanie 84.** Pokaż, że każdy zbiór w  $\mathcal{NP}$  jest rzutem pewnego zbioru z  $\mathcal{P}$ , to znaczy jeśli  $B$  jest w  $\mathcal{NP}$  to istnieje wielomian  $p$  i zbiór  $A \subset \mathcal{N}^2$  należący do  $\mathcal{P}$  i taki, że  $B = \{n : \exists m |m| \leq p(|n|) \text{ i } [n, m] \in A\}$ .

## 9 Redukcje wielomianowe i NP-trudność

**Zadanie 85.** Pokaż że  $5SAT <_P 3SAT$ .

**Zadanie 86.** (za 2 punkty)

Problem STASI (ach, dziś już studenci nie wiedzą co to było STASI, niech się dowiedzą to zobaczą czemu tak nazwałem tu ten problem. Naprawdę nazywa się on problemem zbioru dominującego.) jest taki: mamy dany graf nieskierowany i liczbę  $k$ . Czy da się rozstawić  $k$  agentów w wierzchołkach grafu tak aby każdy wierzchołek w którym nie stoi agent miał (co najmniej jednego) agenta za sąsiada? Pokaż, że  $3SAT <_P STASI$ .

*Wskazówka:* To nie jest trudne. Idea jest podobna jak przy dowodzie faktu, że  $3SAT <_P 3COL$ , który był na wykładzie. Tylko łatwiej.

**Zadanie 87.** (za 2 punkty) Niech  $H$  oznacza problem cyklu Hamiltona dla grafów nieskierowanych (to znaczy język tych wszystkich grafów nieskierowanych w których istnieje ścieżka zamknięta przechodząca dokładnie raz przez każdy wierzchołek).

Niech  $H_d$  oznacza problem cyklu Hamiltona dla grafów skierowanych. Pokaż, że  $H <_P H_d$  i  $H_d <_P H$ . *Wskazówka:* W trudniejszą stronę trzeba każdy wierzchołek odpowiednio zastąpić trzema.

**Zadanie 88.** (za 2 punkty) Klauzula nazywa się *hornowska* jeśli co najwyżej jeden z jej literałów jest niezanegowany. Pokaż, że problem HORNSAT spełnialności formuł w postaci CNF których każda klauzula jest hornowska jest w  $\mathcal{P}$ .

**Zadanie 89.** (za 2 punkty) Pokaż, że problem spełnialności formuł w koniunkcyjnej postaci normalnej w których każda klauzula jest alternatywą co najwyżej dwóch literałów jest w klasie  $\mathcal{P}$ . (Patrz definicja na stronie 375 polskiego wydania książki Hopcrofta i Ullmana. Tłumaczka z bożej łaski tłumaczy CNF jako PNK).

**Zadanie 90.** Pokaż, że  $3SAT <_P 3SAT_3$ . To ostatnie to  $3SAT$  ograniczony tylko do formuł w których żadna zmienna nie występuje więcej niż 3 razy.

**Zadanie 91.** (za 2 punkty) Udowodnij, że problem cyklu Hamiltona NP-zupełny.

**Zadanie 92.** Problem komiwojażera jest taki: dany jest graf nieskierowany pełny, którego krawędzie etykietowane są liczbami całkowitymi. Waga drogi w grafie jest definiowana jako suma wag krawędzi należących do tej drogi. Dana liczba  $k$ . Czy istnieje w grafie cykl Hamiltona o wadze mniejszej niż  $k$ ?

Pokaż, że problem komiwojażera jest NP zupełny. Wolno skorzystać z NP-zupełności problemu Hamiltona.

*Komentarz:* Problem komiwojażera to jedyny kawałek teorii informatyki, który trafił do kultury masowej, stając się w ten sposób kolegą Myszki Miki.

**Zadanie 93.** (za 2 punkty) Pokaż, że jeśli istnieje wielomianowy algorytm wskazujący, dla danego przykładu problemu komiwojażera, cykl nie więcej niż dwa razy dłuższy od optymalnego, to  $\mathcal{P}=\text{NP}$ .

*Wskazówka:* To wcale nie jest trudne zadanie, z całą pewnością nie zasługuje na dwie gwiazdki. Podobnie jak w poprzednim trzeba się odwołać do NP-zupełności problemu Hamiltona.

**Zadanie 94.** Pokaż, że jeśli ograniczymy się do przykładów problemu komiwojażera w którym wagi krawędzi spełniają nierówność trójkąta, to znaczy dla każdego wierzchołków  $v_1, v_2, v_3$  zachodzi  $d(v_1, v_2) + d(v_2, v_3) \geq d(v_1, v_3)$  to istnieje wielomianowy algorytm znajdujący cykl Hamiltona o wadze nie więcej niż dwa razy większej od optymalnej.

**Zadanie 95.** Jaka jest złożoność problemu  $3\text{SAT}_2$ , tzn. problemu spełnialności formuł w postaci 3CNF w których żadna zmienna nie występuje więcej niż 2 razy?

**Zadanie 96.** Jaka jest złożoność problemu  $\text{SAT}_2$ , tzn. problemu spełnialności formuł w postaci CNF w których żadna zmienna nie występuje więcej niż 2 razy?

**Zadanie 97.** (za 2 punkty) Udowodnij, że problem istnienia w danym grafie o  $n$  wierzchołkach klikli mającej  $n/2$  wierzchołków jest NP-zupełny.

**Zadanie 98.** Udowodnij, że jeśli istnieje wielomianowy algorytm znajdujący w danym grafie klikę wielkości co najmniej połowy klikli maksymalnej to istnieje również wielomianowy algorytm znajdujący w danym grafie klikę wielkości co najmniej  $1/\sqrt{2}$  klikli maksymalnej.

**Zadanie 99.** Rozważmy następujący *problem spełnialności dla zdecydowanej większości klauzul*: dane różne klauzule rachunku zdań  $\phi_1, \phi_2 \dots \phi_n$ . Czy można podstawić wartości 0 i 1 za zmienne zdaniowe tak aby więcej niż  $9/10$  spośród klauzul  $\phi_1, \phi_2 \dots \phi_n$  przyjęła wartość logiczną 1? Udowodnij, że *problem spełnialności dla zdecydowanej większości klauzul* jest NP-zupełny. Przypominam, że klauzulą nazywamy formułę postaci  $l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_k$ , gdzie  $l_i$  są literałami, to znaczy zmiennymi zdaniowymi lub ich negacjami. *Wskazówka:* skorzystaj z NP-zupełności SAT.

**Zadanie 100.** Niech  $\mathcal{P}_1$  będzie zbiorem grafów nieskierowanych niespójnych, niech  $\mathcal{P}_2$  będzie zbiorem wszystkich grafów nieskierowanych zawierających jakiś wierzchołek stopnia mniejszego od 2 i niech wreszcie  $\mathcal{P}_3$  będzie zbiorem tych grafów nieskierowanych, w których jest droga Hamiltona przechodząca przez przynajmniej połowę wierzchołków.

Czy zbiór  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$  jest NP-zupełny?

**Zadanie 101.** Niech  $\text{KLIKA}_c$  będzie problemem istnienia w danym grafie o  $n$  wierzchołkach klikli zawierającej nie mniej niż  $n/c$  wierzchołków. Pokaż że dla każdego  $c, c'$  zachodzi  $\text{KLIKA}_c \leq_P \text{KLIKA}_{c'}$ .

**Zadanie 102.** Rozważmy następujący *problem smutnych strażników*. Dany jest pewien zbiór strażników  $s_1, s_2, \dots, s_l$ . Strzegą oni obiektów  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Odbywa się to tak, że każdy strażnik  $s_i$  ma w swoim kantorku dwa ekrany telewizyjne  $E_i$  i  $F_i$ , i na każdym z tych ekranów widzi, za pośrednictwem nieruchomej kamery, pewien niezmienny zbiór obiektów (odpowiednio  $Z_{E_i}$  i  $Z_{F_i}$ , zbiory te oczywiście niekoniecznie muszą być parami rozłączne). Powiemy że *strażników można rozweselić* jeśli da się przestawić u każdego z nich jeden

telewizor na kanał gdzie akurat transmitują mecz, ale w taki sposób, że każdy obiekt ze zbioru  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  pozostaje pod obserwacją na jakimś nieprzestawionym telewizorze.

Pokaż że problem rozstrzygnięcia, dla danego przykładu problemu smutnych strażników, czy strażników tych da się rozweselić, jest NP-zupełny.

**Zadanie 103.** Udowodnij, że następujący problem podziału  $n$  harcerzy na 4 drużyny jest NP-zupełny.

Dany jest hufiec  $H$  harcerzy, i lista  $E \subset H^2$  par harcerzy którzy się nie lubią. Czy da się podzielić  $H$  na cztery drużyny tak, aby spełnione były warunki:

- drużyny mają być z grubsza równej wielkości: do każdej z nich musi należeć przynajmniej jedna piąta wszystkich harcerzy z  $H$ .
- w żadnej drużynie nie mogą jednocześnie znaleźć się dwaj harcerze, którzy się nie lubią.

**Zadanie 104.** W Pewnej Wschodniej Krainie wszystkim rządzą trzej gangsterzy, pan R, pan G i pan B. Każda firma, która chce mieć spokój i dostawać koncesje i kontrakty, musi mieć wśród członków swojej rady nadzorczej przyjaciół przynajmniej dwóch spośród tych trzech gangsterów. Kłopot polega jednak na tym, że:

- gangsterzy za sobą nawzajem nie przepadają, więc każdy członek rady może przyjaźnić się z co najwyżej jednym gangsterem;
- rady nadzorcze różnych firm niekoniecznie muszą być rozłączne.

Udowodnij, że problem:

*Dane listy członków rad nadzorczych pewnej ilości firm, czy da się osoby figurujące na tych listach pozaprzyjaźnić z panami R, G i B, w taki sposób, aby wszystkie z tych firm miały spokój?*

Jest NP-zupełny.

*Wskazówka:* Zauważ, że warunki zadania implikują w szczególności, że rada nadzorcza firmy która chce mieć spokój, musi liczyć nie mniej niż dwóch członków. Okazuje się, że przy odpowiedniej redukcji wystarczy ograniczyć się do takich właśnie dwuosobowych rad.

**Zadanie 105.** Jaka jest złożoność następującego problemu klasy udającej się na wycieczkę. Klasa ma udać się na wycieczkę do Świeradowa. Jednak ze względu na trawiący ją wewnętrzny konflikt, niektórzy z młodych ludzi obwarowują kwestię swojego wyjazdu pewnymi warunkami. Warunki te mają następującą postać:

Ja (jadę|nie jadę) jeśli X (jedzie|nie jedzie)

gdzie X przebiega zbiór uczniów klasy. Każdy uczeń może przedstawić Pani Wychowawczyni dowolną ilość takich warunków. Jaka jest złożoność problemu sprawdzenia, czy da się zorganizować wycieczkę w sposób uwzględniający wszystkie postawione warunki? Wielkością zadania jest tu łączna ilość warunków.

**Zadanie 106.** Udowodnij że problem istnienia, dla danego grafu nieskierowanego, takiego kolorowania wierzchołków tego grafu trzema kolorami, aby każdy wierzchołek sąsiedował z co najwyżej jednym wierzchołkiem tego samego koloru, jest NP-zupełny.

**Zadanie 107.** Jaka jest złożoność problemu spełnialności formuł boolowskich w postaci CNF, jeśli ograniczymy się do formuł w których:

- a) w każdej klauzuli jest co najwyżej jedna niezanegowana zmienna,
- b) w każdej klauzuli jest co najwyżej jedna niezanegowana zmienna albo co najwyżej jedna zanegowana zmienna.

**Zadanie 108.** Przykładem problemu pokrycia zbioru podzbiarami rozłącznymi (PZPR) jest skończona rodzina  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  skończonych zbiorów.  $A \in \text{PZPR}$  jeśli istnieje rodzina  $B \subseteq A$  zbiorów rozłącznych, taka że suma wszystkich zbiorów z  $B$  jest równa sumie wszystkich zbiorów z  $A$ . Udowodnij, że  $3\text{SAT} \leq_P \text{PZPR}$ . *Wskazówka: pokaż, że  $3\text{SAT} \leq_P \text{PZPR}$  gdzie  $3\text{SAT}$  to problem spełnialności dla formuł w postaci  $3\text{CNF}$  w których każda zmienna występuje najwyżej 3 razy.*

**Zadanie 109.** Jaka jest złożoność problemu istnienia, dla danej formuły boolowskiej w postaci CNF, wartościowania przy którym w każdej klauzuli wszystkie literały przyjmują wartość 1 albo wszystkie literały przyjmują wartość 0? *Wskazówka: co wiesz o złożoności problemu  $2\text{CNF}$ ?*

**Zadanie 110.** Niech  $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$  będzie bijekcją obliczalną w czasie wielomianowym. Czy wynika z tego, że  $f^{-1}$  też jest bijekcją obliczalną w czasie wielomianowym?

**Zadanie 111.** Jaka jest złożoność następującego problemu: Dany graf nieskierowany. Czy istnieje taki sposób pokolorowania jego krawędzi dwoma kolorami, czerwonym i niebieskim, aby każda krawędź była pokolorowana i aby nie pojawił się żaden niebieski cykl nieparzystej długości ani żaden czerwony cykl nieparzystej długości?

## 10 Inne klasy złożoności obliczeniowej

**Zadanie 112.** Udowodnij, że problem, czy dane wyrażenie regularne opisuje wszystkie słowa nad danym alfabetem, jest w PSPACE.

**Zadanie 113.** (za 3 punkty) Instancja Gry w Kamienie to: skończony zbiór  $X$  (zbiór pól), relacja  $R \subseteq X^3$ , zbiór  $Y \subset X$  i element  $f \in X$ .

Grę toczą dwaj gracze wykonujący na przemian ruchy. Przed każdym ruchem na niektórych polach ze zbioru  $X$  znajdują się kamienie: przed pierwszym ruchem pierwszego gracza mamy po jednym kamieniu w każdym polu zbioru  $Y$ , który to zbiór wyznacza w ten sposób pozycje początkową w grze. W swoim ruchu każdy z graczy przesuwa jeden kamień zgodnie z regułą, że jeśli zachodzi  $R(x, y, z)$ , oraz w  $x$  i w  $y$  są kamienie a w  $z$  nie ma kamienia to wolno przesunąć kamień z  $x$  do  $z$ . Wygrywa ten kto pierwszy postawi kamień w  $f$ .

Jaka jest złożoność problemu: dana instancja gry w kamienie. Czy gracz pierwszy ma strategię wygrywającą?

**Zadanie 114.** Udowodnij, że problem prawdziwości formuł postaci  $\exists! x_1 \exists! x_2 \dots \exists! x_n \phi(x_1, x_2 \dots x_n)$  jest w PSPACE. Zmienne  $x_1, x_2, \dots, x_n$  przebiegają tu zbiór  $\{0, 1, 2\}$ . Kwantyfikator  $\exists!$  oznacza *istnieje dokładnie jeden*, zaś  $\phi$  jest formułą bez kwantyfikatorów, z  $n$  zmiennymi, zbudowaną przy pomocy spójników boolowskich i symboli arytmetyki modulo 3, to znaczy symboli dodawania i mnożenia modulo 3, symbolu równości i stałych  $\{0, 1, 2\}$ .

**Zadanie 115.** Jaka jest złożoność problemu istnienia, dla danej formuły boolowskiej  $\phi$  w postaci  $2\text{CNF}$  wartościowania spełniającego  $\phi$  i przyporządkowującego wartość logiczną 1 przynajmniej trzem spośród zmiennych występujących w  $\phi$ ?

**Zadanie 116.** (za 2 punkty)

Udowodnij, że są języki rekurencyjne które nie są w PSPACE.

**Zadanie 117.** Udowodnij, że problem prawdziwości formuł postaci  $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \phi(x_1, x_2 \dots x_n)$ , gdzie każdy  $Q_i$  to albo  $\exists!$ , oznaczający *istnieje dokładnie jeden*, albo  $\exists$  (czyli *istnieje*), albo  $\forall$  (czyli *dla każdego*), zaś  $\phi$  jest formułą boolowską, jest PSPACE-zupełny.

**Zadanie 118.** (za 2 punkty)

Funkcja różnowartościowa  $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ , i taka, że dla każdego  $n$  zachodzi  $|n| = |f(n)|$  jest jednostronna jeśli istnieje wielomianowy algorytm obliczający  $f$  ale nie ma wielomianowego algorytmu obliczającego  $f^{-1}$ . Pokaż, że jeśli istnieje jakaś funkcja jednostronna to  $\mathcal{NP} \cap \text{co-}\mathcal{NP} \neq \mathcal{P}$ .

*Wskazówka:* Rozważ zbiór  $\{ \langle x, y \rangle : f^{-1}(x) < y \}$

**Definicja .** Powiemy że język  $A$  należy do klasy altPTIME jeśli istnieją wielomian  $p$  i język  $B \in \text{PTIME}$ , takie, że zachodzi równoważność:

$w \in A$  w.t.w. gdy gracz pierwszy ma strategię wygrywającą w opisanej poniżej grze  $\text{Gra}(w, p, B)$

$\text{Gra}(w, p, B)$  ma następujące reguły. Zaczyna się od napisania na taśmie słowa  $s_1 = w\#$ . Następnie, w rundzie  $i$ -tej, najpierw gracz pierwszy dopisuje do aktualnie zapisanego słowa  $s_i$  wybrany przez siebie sufix  $w_i\#$  a następnie gracz drugi dopisuje do  $s_i w_i\#$  pewien wybrany przez siebie sufix  $v_i\#$ , tworząc w ten sposób słowo  $s_{i+1}$ . Żąda się przy tym aby długości  $w_i$  i  $v_i$  były obie równe  $p(n)$ , gdzie  $n$  jest długością słowa  $w$ . Gracz pierwszy wygrywa gdy  $s_{p(n)} \in B$ .

**Definicja.** Powiemy że język  $A$  należy do klasy altPTIME jeśli istnieją wielomian  $p$  i język  $B \in \text{PTIME}$ , takie, że zachodzi równoważność:

$w \in A$  w.t.w. gdy gracz pierwszy ma strategię wygrywającą w opisanej poniżej grze  $\text{Gra}(w, p, B)$

$\text{Gra}(w, p, B)$  ma następujące reguły. Zaczyna się od napisania na taśmie słowa  $s_1 = w\#$ . Następnie, w rundzie  $i$ -tej, najpierw gracz pierwszy dopisuje do aktualnie zapisanego słowa  $s_i$  wybrany przez siebie sufix  $w_i\#$  a następnie gracz drugi dopisuje do  $s_i w_i\#$  pewien wybrany przez siebie sufix  $v_i\#$ , tworząc w ten sposób słowo  $s_{i+1}$ . Żąda się przy tym aby długości  $w_i$  i  $v_i$  były obie równe  $p(n)$ , gdzie  $n$  jest długością słowa  $w$ . Gracz pierwszy wygrywa gdy  $s_{p(n)} \in B$ .

**Zadanie 119.** (za 2 punkty) Udowodnij że altPTIME=PSPACE.

**Definicja .** Powiemy że język  $A$  należy do klasy altPSPACE jeśli istnieją wielomian  $p$  oraz języki  $B, C \in \text{PTIME}$ , takie, że zachodzi równoważność:

$w \in A$  w.t.w. gdy gracz pierwszy ma strategię wygrywającą w opisanej poniżej grze  $\text{Gra2}(w, p, B, C)$

$\text{Gra2}(w, p, B)$  ma następujące reguły. Zaczyna się od napisania na taśmie słowa  $w\#$ . Następnie, w pierwszej rundzie, najpierw gracz pierwszy dopisuje do  $w\#$  wybrany przez siebie sufix  $w_1\#$  tworząc w ten sposób  $t_1 = w\#w_1\#$ , a następnie gracz drugi dopisuje do  $t_1$  pewien wybrany przez siebie sufix  $v_1\#$ , tworząc w ten sposób słowo  $s_1$ . W  $i$ -tej rundzie najpierw gracz pierwszy wymazuje z taśmy słowo  $w_{i-1}$  zastępując je wybranym przez siebie  $w_i$  (powstałe w ten sposób słowo nazywamy  $t_i$ ) a następnie drugi gracz wymazuje z taśmy słowo  $v_{i-1}$  zastępując je przez  $v_i$ . Powstałe słowo (równe  $w\#w_i\#v_i$ ) oznaczamy przez  $s_i$ . Żąda się przy tym aby długości  $w_i$  i  $v_i$  były obie równe  $p(n)$ , gdzie  $n$  jest długością słowa  $w$ . Gra kończy się porażką pierwszego gracza, gdy w którejś rundzie pojawi się słowo  $t_i$  takie że  $t_i \notin B$ . Gra kończy się porażką drugiego gracza, gdy w którejś rundzie pojawi się słowo  $s_i$  takie że  $s_i \notin C$ .

**Zadanie 120.** Udowodnij, że jeśli któryś z graczy ma strategię wygrywającą w grze  $\text{Gra2}(w, p, B, C)$ , to może doprowadzić do zwycięstwa nie dalej, niż po wykładniczej względem długości  $w$  ilości rund.

**Zadanie 121.** (za 2 punkty) Udowodnij, że  $altPSPACE \subseteq EXPTIME$ .

**Zadanie 122.** za 3 punkty Udowodnij, że  $EXPTIME \subseteq altPSPACE$ .

**Zadanie 123.** (za 2 punkty) Wyobraźmy sobie prostokątną tabelkę o 17 wierszach i 5 kolumnach, w każde pole której wolno wpisać 0 lub 1. Ponadto wyobraźmy sobie formułę zdaniową KROK, w której występuje 10 zmiennych.

Mówimy, że tabelka jest poprawnie wypełniona jeśli dla każdych kolejnych dwóch wierszy  $a_1a_2a_3a_4a_5$  i  $b_1b_2b_3b_4b_5b_6$  zachodzi:

$$KROK(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5).$$

Niech  $k_1k_2k_3k_4k_5$  i  $m_1m_2m_3m_4m_5$  będą dwoma ustalonymi ciągami zerojedynkowymi. Napisz QBF mówiącą, że można poprawnie wypełnić naszą tabelkę zerami i jedynkami w taki sposób, że w pierwszym wierszu jest  $k_1k_2k_3k_4k_5$  w ostatnim zaś  $m_1m_2m_3m_4m_5$ . Formuła nie może zawierać więcej niż 45 zmiennych (nie liczymy  $m_1 \dots m_5$  i  $k_1 \dots k_5$  - to nie są zmienne). Oczywiście szukana QBF będzie zawierała pewną ilość wystąpień podformuły KROK.

Przez QBF rozumiemy tu formułę zdaniową o  $k$  zmiennych poprzedzoną  $k$  kwantyfikatorami, wiążącymi te zmienne. To znaczy  $\forall p \exists q (p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$  jest QBF a  $\forall p [(\exists q (p \vee q)) \wedge (\exists q (\neg p \vee q))]$  nie jest.

**Zadanie 124.** Napisz formułę rachunku predykatów mówiącą, że w danym grafie  $\langle V, R \rangle$  istnieje ścieżka prowadząca z danego wierzchołka  $c$  do danego wierzchołka  $k$  złożona z dokładnie 16 krawędzi. Formuła ta ma mieć przy tym nie więcej niż 10 wystąpień kwantyfikatorów.

Przez formułę rachunku predykatów rozumiemy tu formułę w której używa się kwantyfikatorów wiążących zmienne przebiegające zbiór  $V$ , symbolu relacji  $R$ , symbolu równości, nawiasów i spójników logicznych.

*Wyjaśnienie.* Formuła:  $\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_{15} R(c, x_1) \wedge R(x_1, x_2) \wedge \dots \wedge R(x_{15}, k)$  spełnia wszelkie wymogi zadania, oprócz tego, że ma 15 kwantyfikatorów.

**Zadanie 125.** Dla danej formuły  $\phi$  zbudowanej, zgodnie ze zwykłymi regułami, ze zmiennych  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ , z liczb naturalnych 0,1 i 2, ze spójników boolowskich oraz z symboli  $=_3, +_3$  i  $\times_3$  (rozumianych jako równość modulo 3, dodawanie modulo 3 i mnożenie modulo 3), ale bez kwantyfikatorów, rozważmy następującą grę  $G(\phi)$  między graczami X i Y.

Rozgrywka składa się z  $n$  ruchów, w trakcie których zastępuje się zmienne w formule  $\phi$  stałymi. W ruchu  $i$  najpierw gracz X wybiera  $k \in \{0, 1, 2\}$  i zastępuje wszystkie wystąpienia zmiennej  $x_i$  przez liczbę  $k$ , a następnie gracz Y wybiera  $l \in \{0, 1, 2\}$  i zastępuje wszystkie wystąpienia zmiennej  $y_i$  przez liczbę  $l$ . Gracz X wygrywa jeśli formuła bez zmiennych, w jaką zamieni się  $\phi$  po ostatnim ruchu gracza Y, jest prawdziwa.

Niech 3GRA będzie problemem rozstrzygnięcia, dla danej formuły  $\phi$ , czy gracz X ma strategię wygrywającą w grze  $G(\phi)$ . Udowodnij, że  $QBF \leq_P 3GRA$ .

**Zadanie 126.** Jaka jest złożoność problemu prawdziwości kwantyfikowanych formuł boolowskich, w których są co najwyżej dwa wystąpienia kwantyfikatora ogólnego?

**Zadanie 127.** Jaka jest złożoność problemu rozstrzygnięcia, dla danych dwóch deterministycznych automatów skończonych  $M_1$  i  $M_2$  czy język  $L_{M_1} \cap L_{M_2}$  jest niepusty? (wielkością zadania jest tu łączna ilość stanów tych automatów)

**Zadanie 128.** Jaka jest złożoność problemu rozstrzygnięcia, dla danych deterministycznych automatów skończonych  $M_1, M_2 \dots M_k$  czy język  $L_{M_1} \cap L_{M_2} \dots \cap L_{M_k}$  jest niepusty? (wielkością zadania jest tu łączna ilość stanów tych automatów)