Egzamin licencjacki — 23 września 2008

Z zestawu sześciu zadań (Matematyka I, Matematyka II, Programowanie, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych i Metody numeryczne) poniżej należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązania trzech zadań. Za brakujące (do trzech) zadania zostanie wystawiona ocena nieostateczna z urzędu. Egzamin uważa się za zaliczony, jeśli student rozwiąże z oceną dostateczną co najmniej 2 zadania. Wtedy ocena z egzaminu jest średnią arytmetyczną ocen z trzech wybranych zadań. Na rozwiązanie zadań przeznacza się czas 3x40=120 minut. Po wyjściu z sali egzaminacyjnej w czasie egzaminu nie ma możliwości powrotu do tej sali i kontynuowania pisania egzaminu.

Matematyka I

Za poprawne rozwiązanie całego zadania można otrzymać 9 punktów. 3 punkty dają ocenę dostateczną, 4 — dostateczną z plusem, 5 — dobrą, 6 — dobrą z plusem, a 7 — ocenę bardzo dobrą.

1. **(3 punkty)** Niech t_1, d_1, t_2, d_2 będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Używając tylko symboli $t_1, d_1, t_2, d_2, +, \wedge, \vee, <, \leq, >, \geq, (,)$ napisz formułę wyrażającą własność, że przedziały domknięte $[t_1, t_1 + d_1]$ oraz $[t_2, t_2 + d_2]$
   (a) mają część wspólną,
   (b) nie mają części wspólnej.
2. **(1 punkt)** Czy dla dowolnych zbiorów $A, B \subseteq X$ oraz dowolnej funkcji $f : X \to Y$ zachodzi równość $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$? Uzasadnij odpowiedź.
3. **(1 punkt)** Sformułuj zasadę indukcji matematycznej.
4. **(4 punkty)** Udowodnij indukcyjnie, że dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq 2$ zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$ ma dokładnie $\frac{n(n-1)}{2}$ podzbiorów dwuelementowych.

Matematyka II

1. Sprawdzić, czy wektory $[0, 1, 1], [1, 0, 1], [1, 0, 0]$ są liniowo niezależne nad ciałem R.
2. W ciele $\mathbb{Z}_{11}$ rozwiązać równanie $3x + 4 = 1$.
3. Czy zbiór $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_3 = 0\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$? Jeśli tak, podać przykładową bazę.

Programowanie

Za zadanie można otrzymać 20 punktów. Aby otrzymac ocenę dostateczną, należy zdobyć 7 punktów, próg dla dst+ to 9p, dla db – 11p, dla db+ 13p, dla bdb – 15p.

Część 1. Gramatyka G_1 z symbolem startowym S nad alfabetem $\{a, b\}$ dana jest za pomocą następującego zbioru produkcji:

$$\{S \to aSbS,\ S \to \varepsilon\}$$

a) Czy wszystkie słowa generowane przez tę gramatykę zawierają tyle samo liter a co b? Odpowiedź krótko uzasadnij. **(1p)**

b) Pokaż, że nie każde słowo zawierające tyle samo liter a co b należy do języka generowanego przez tę gramatykę. **(1p)**

c) Opisz słownie zbiór słów generowanych przez gramatykę G_1 **(2p)**

d) Niech $A_1 = L(G_1) \cap \mathcal{L}((a^*b^*a^*))$. Przedstaw możliwie prostą gramatykę bezkontekstową lub wyrażenie regularne generujące A_1. Uzasadnij poprawność. **(3p)**.

e) Niech $A_2 = L(G_1) \cap \mathcal{L}((a^*b^*a^*b^*))$. Napisz funkcję w języku C, `int in_a2(char *s)` zwracającą wartość logiczną, mówiącą czy napis `s` jest słowem, które należy do A_2. **(3p)**

Przypominam, że $L(G)$ to język generowany przez gramatykę G, a $\mathcal{L}(r)$ to język generowany przez wyrażenie regularne r.

Część 2. Będziemy porównywać leksykograficznie listy liczb całkowitych. Opisz, co dokładnie znaczy, że dwie takie listy są w porządku leksykograficznym (takim jak w słowniku). **(3p)**

Dalsza część zadania ma dwa warianty (do wyboru przez studenta, w przypadku rozwiązania obu sprawdzany jest **tylko** ten wariant, który w odpowiedzi pojawia się jako pierwszy).

Wariant funkcjonalny

Możesz używać Haskella albo SML-a. W specyfikacji zadania używamy typów Haskellowych. Napisz funkcję `lexord :: [Int] -> [Int] -> Bool`, która sprawdza, czy pierwszy argument jest leksykograficznie mniejszy bądź równy drugiemu. **(5+2p)** (5 punktów za poprawne rozwiązanie, 2 dodatkowe punkty za eleganckie zapisanie rozwiązania).

Wariant logiczny

W tym wariancie powinieneś używać Prologa. Napisz predykat `lex(L1,L2)`, który, gdy zostanie uruchomiony dla ukonkretnionych list liczb całkowitych, kończy wykonanie z sukcesem jedynie wówczas, gdy `L1` jest leksykograficznie mniejsze bądź równe `L2`. **(5+2p)** (5 punktów za poprawne rozwiązanie, 2 dodatkowe punkty za eleganckie zapisanie rozwiązania).

Matematyka dyskretna

Niech G będzie grafem. Pokaż, że ma on co najmniej $\chi(G)$ wierzchołków stopnia $\chi(G) - 1$ lub większego.

Algorytmy i struktury danych

Za poprawne rozwiązanie całego zadania można otrzymać 9 punktów. 3 punkty dają ocenę dostateczną, 4 — dostateczną z plusem, 5 — dobrą, 6 — dobrą z plusem, 7 — ocenę bardzo dobrą.

Część 1 (4 punkty). Jakie operacje powinna efektywnie realizować struktura danych zwana *kolejką priorytetową*? Opisz realizację tej struktury danych za pomocą *kopca*. Jak implementuje się kopiec w tablicy (napisz procedury w pseudokodzie)? Przeanalizuj złożoność czasową poszczególnych operacji.

Część 2 (5 punktów). Rozważmy zbiór dynamiczny, którego elementy pochodzą ze zbioru z porządkiem liniowym z relacją $\leq$. Zaprojektuj strukturę danych, która w czasie logarytmicznym względem aktualnej liczby elementów w zbiorze będzie wykonywać operacje *insert(x)* (wstawienie elementu x do zbioru) i *extract–median()* (usunięcie mediany ze zbioru) oraz w czasie stałym będzie wskazywać medianę zbioru *find–median()*.

Rozwiązując to zadanie wykorzystaj kopce. Krótko ale precyzyjnie opisz działanie wymienionych procedur.

Metody numeryczne

1. Przypomnij metodę Romberga obliczania przybliżonej wartości całki $\int_a^b f(x)dx$.

2. Korzystając z zależności

$$T_{2n}(f) = \frac{1}{2}T_n(f) + h_{2n}\sum_{i=1}^{n} f(a + (2i-1)h_{2n}), \qquad h_{2n} := \frac{b-a}{2n},$$

gdzie T_n oznacza złożony wzór trapezów,

$$T_n(f) := \frac{h_n}{2}f(a) + h_n\sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih_n) + \frac{h_n}{2}f(b), \qquad h_n := \frac{b-a}{n},$$

zaproponuj efektywny algorytm wyznaczania N pierwszych wierszy tablicy Romberga.