Egzamin licencjacki 28. czerwca 2005 r.

z przedstawionych zadań należy wybrać 3 zadania,
każde zadanie rozwiązać na oddzielnej, podpisanej nazwiskiem kartce.

Matematyka I

Za poprawne rozwiązanie tego zadania można otrzymać 12 punktów. 4 punkty dają ocenę dostateczną, $5\frac{1}{2}$ — dostateczną z plusem, 7 — dobrą, $8\frac{1}{2}$ — dobrą z plusem, a 10 — ocenę bardzo dobrą.

Przypomnienie: formuły rachunku zdań budujemy ze zmiennych zdaniowych i spójników logicznych $\bot, \top, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$ (oznaczających odpowiednio fałsz, prawdę, negację, koniunkcję, alternatywę, implikację i równoważność) oraz nawiasów. W formułach rachunku zdań nie używa się kwantyfikatorów.

Zadanie

(a) (3 punkty) Zaneguj każdą z następujących formuł i doprowadź do postaci, w której negacja występuje wyłącznie bezpośrednio przed zmiennymi zdaniowymi. Na przykład dla formuły $\neg p \vee q$ poprawną odpowiedzią jest $p \wedge \neg q$.

- $(p \wedge q) \vee r$
- $\neg(p \wedge q) \vee \neg(p \wedge r)$
- $p \wedge \neg(q \vee r)$

(b) (2 punkty) Nie używając nawiasów (używając tylko symboli $\varphi, \psi, \neg, \wedge, \vee$) uzupełnij poniższe równoważności tak, aby były one prawdziwe dla dowolnych formuł φ i ψ rachunku zdań (jeśli zrobisz to najprostszym możliwym sposobem, otrzymasz tzw. prawa de Morgana).

- $\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \ldots$
- $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \ldots$

(c) (3 punkty) Sformułuj zasadę indukcji matematycznej.

(d) (4 punkty) Korzystając z zasady indukcji matematycznej udowodnij, że dla każdej formuły rachunku zdań zbudowanej ze zmiennych zdaniowych, spójników $\neg, \wedge, \vee$ oraz nawiasów (tzn. bez użycia spójników $\bot, \top, \Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$) istnieje równoważna formuła, w której negacje występują wyłącznie bezpośrednio przed zmiennymi zdaniowymi.

Uwagi: W punktach (a) i (b) nie trzeba uzasadniać odpowiedzi. Jeśli w punkcie (c) podasz taką wersję zasady indukcji, która nie wystarczy do udowodnienia punktu (d), otrzymasz za to nie więcej niż 2 punkty.

Matematyka II

Podać przykład przekształcenia liniowego $T : R^4 \to R^4$ takiego, że $\dim Ker\, T = 2$ (wymiar jądra). Jaki jest wymiar obrazu takiego przekształcenia? (odpowiedź oczywiście uzasadnić).

Algorytmy i struktury danych

Metoda dynamiczna

Podaj algorytm dynamiczny znajdowania najdłuższego wspólnego podciągu dwóch ciągów. Uzasadnij jego poprawność i oszacuj złożoność.

Podaj także własny przykład innego problemu, który ma efektywne rozwiązanie oparte na metodzie dynamicznej.

Odpowiedz, w jakich przypadkach metoda dynamiczna pozwala konstruować efektywne algorytmy. Porwnaj ją z metodą rekurencyjną.

Programowanie

Marcin udał się do księgarni by kupić podręcznik Prologu. Ponieważ jest dziś pierwszym klientem, to księgarniana kasa jest pusta i sprzedawczyni nie może wydać reszty. Marcin musi więc zapłacić za książkę odliczoną kwotą. Nurtuje go pytanie, na ile sposobów może zapłacić za książkę monetami, które ma w kieszeni. (Rzecz dzieje się w odległym kraju, w którym książki są tak tanie, że można je kupować za kieszonkowe.) Przyjmujemy przy tym, że monety o tym samym nominale są nierozróżnialne. Marcin opisał zawartość swojej kieszeni przy pomocy prologowej listy par postaci

$$M = \texttt{[(}n_1\texttt{,}l_1\texttt{)}\texttt{,}\ldots\texttt{,(}n_k\texttt{,}l_k\texttt{)]}.$$

Wystąpienie w powyższej liście pary $\texttt{(}n_i\texttt{,}l_i\texttt{)}$ oznacza, że w kieszeni Marcina znajduje się l_i monet o nominale n_i. Przyjmijmy, że liczby l_i oraz n_i są dodatnie oraz że lista nie zawiera dwóch par o tym samym nominale. Niech cena książki wynosi C. Pomóż Marcinowi rozwiązać jego problem pisząc predykat

$$\texttt{gotówka(}+C\texttt{,}+M\texttt{,}?Z\texttt{)}$$

gdzie C jest ceną książki, M jest listą opisującą zawartość marcinowej kieszeni, zaś Z jest listą w tym samym formacie, która reprezentuje zapłatę za książkę. Predykat powinien nawracać tyle razy, ile jest różnych sposobów zapłaty i każdy z nich powinien pojawić się tylko raz.

Matematyka Dyskretna

Wylicz takie całkowite x, y, że

$$124x + 333y = 1.$$

Metody Numeryczne

a) Znajdź wielomian w, możliwie najniższego stopnia, który dla argumentów -4, -3, -1, 0, 1, 2, 4 przyjmuje odpowiednio wartości 483, 170, 0, -1, -2, -15, -5.

b) Za pomocą złożonego wzoru trapezów wyznacz przybliżoną wartość całki

$$\int_{-4}^{4} w(x)dx\,,$$

gdzie w jest wielomianem z punktu a).

Uwaga! Aby przybliżyć wartość tej całki nie musisz wcześniej rozwiązać zadania a).