

Zadanie z matematyki I

Za poprawne rozwiązanie całego zadania można otrzymać 9 punktów. 3 punkty dają ocenę dostateczną, 4 — dostateczną z plusem, 5 — dobrą, 6 — dobrą z plusem, a 7 — ocenę bardzo dobrą.

(a) Niech φ oznacza zdanie

$$\forall x \exists z (x \in A \wedge z \in A \Rightarrow x \notin B)$$

- (1) Zapisz to zdanie bez użycia symbolu $\Rightarrow$.
 - (2) Zaneguj zdanie φ i doprowadź do postaci, w której nie występuje symbol negacji (można używać symboli relacji $<, \leq, >, \geq, =, \neq$).
 - (3) Czy zdanie φ jest równoważne zdaniu $\neg \exists x \forall z (x \in A \cup B \wedge z \in A)$?
 - (4) Czy zdanie φ jest równoważne zdaniu $\forall x \neg \forall z (x \in A \cap B \wedge z \in A)$?
- (4 punkty).

(b) Udowodnij indukcyjnie, że dla każdej liczby naturalnej $n > 0$ zachodzi

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

(5 punkty).