

Zadanie z matematyki I

Za poprawne rozwiązanie całego zadania można otrzymać 12 punktów. 4 punkty dają ocenę dostateczną, $5\frac{1}{2}$ — dostateczną z plusem, 7 — dobrą, $8\frac{1}{2}$ — dobrą z plusem, a 10 — ocenę bardzo dobrą.

- (a) Wskaż wystąpienia zmiennych wolnych w formule

$$\forall x > y \exists z (y < z \wedge z < x)$$

Zaneguj tę formułę i doprowadź do postaci, w której nie występuje symbol negacji (można używać symboli relacji $<, \leq, >, \geq, =, \neq$) (3 punkty).

- (b) Uzupełnij poniżej zamieszczone równoważności o odpowiednie (tzn. równoważne zdaniom po lewej stronie symbolu $\Leftrightarrow$) zdania, *nie używając spójników logicznych* ($\vee, \wedge, \neg$), używając za to odpowiednich operacji rachunku zbiorów, jak pokazane jest w pierwszej, przykładowej równoważności. Dopisane zdania powinny być możliwie krótkie.

$$\begin{aligned}x \in A \wedge x \in B &\Leftrightarrow x \in A \cap B \\x \in A \vee x \in B &\Leftrightarrow \dots \\x \notin A \wedge x \in B &\Leftrightarrow \dots \\(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B) &\Leftrightarrow \dots \\(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin B) &\Leftrightarrow \dots\end{aligned}$$

(4 punkty).

- (b) Zdefiniujmy ciąg liczb naturalnych $a_0, a_1, a_2, \dots$ w następujący sposób:

$$\begin{aligned}a_0 &= 2 \\a_1 &= 1 \\a_{n+2} &= \frac{a_n + a_{n+1}}{2} \quad (\text{dla dowolnej liczby naturalnej } n)\end{aligned}$$

Udowodnij indukcyjnie, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi następujące zdanie:

jeżeli n jest liczbą parzystą, to $a_n > a_{n+1}$,
jeżeli natomiast n jest liczbą nieparzystą, to $a_n < a_{n+1}$.

(5 punktów).