

Minimalizacja układów logicznych

1 Wstęp

Notatki do tego wykładu nie są najpełniejsze. Jeżeli ktoś nie był na wykładzie, to być może będzie musiał poszukać dodatkowych źródeł. Nie powinno być z tym problemu - w sieci można znaleźć mnóstwo informacji na temat omawianych metod.

1.1 Kryteria minimalizacji

Kryteria, według których minimalizujemy układy mogą być różne: liczba użytych bramek, szybkość działania (czyli liczba poziomów bramek). Zazwyczaj mamy także ograniczenia na rodzaje używanych bramek. My będziemy minimalizować wyrażenia w postaci dysjunkcyjnej, tak aby uzyskać najmniejszą możliwą liczbę iloczynów oraz (w drugiej kolejności) minimalną liczbę literałów. Przypominam, że wynik wciąż nie musi być jednoznaczny: wyrażenia $xy + \bar{x}\bar{y} + \bar{x}z$ oraz $xy + \bar{x}\bar{y} + yz$ są równoważne, a każde równoważne im wyrażenie w dysjunkcyjnej postaci normalnej musi mieć co najmniej trzy iloczyny. W dodatku każdy z nich musi zawierać co najmniej po dwie zmienne (lub ich negacje).

1.2 Metody minimalizacji

1. Przekształceń formalnych - czasami trudne, wymaga pomysłowości, nie zawsze mamy gwarancję, że uzyskaliśmy optymalny wynik
2. Metody algorytmiczne: metoda siatek Karnaugh'a, metoda Quinea-McCluskey'a (implikantów prostych). Metody algorytmiczne bazują oczywiście również na przekształceniach formalnych.

Siatki Karnaugh'a są wygodne dla funkcji co najwyżej czterech zmiennych. Dla większej liczby zmiennych łatwiej używać metody Quine'a-McCluskey'a.

Metody algorytmiczne bazują na dwóch operacjach, których poprawność wynika z własności algebry Boole'a: sklejania ($af_i + a\bar{f}_i = a$) i pochłaniania ($a + af_i = a$). Dużą rolę odgrywa pojęcie implikanta prostego. Dla danej funkcji f **implikantem** jest taki iloczyn zmiennych i ich negacji, że jeśli dla pewnej kombinacji wartości zmiennych staje się on prawdziwy, to przy tej kombinacji wartości również cała funkcja jest prawdziwa. **Implikant prosty**, to taki, że po usunięciu z niego jednego literału przestaje on być implikantem.

Poszukiwana postać minimalna jest sumą pewnych implikantów prostych danej funkcji: w jej skład wchodzi wszystkie **implikanty zasadnicze** (implikant jest zasadniczy, jeśli jako jedyny jest prawdziwy dla pewnej kombinacji wejściowej, dla której funkcja zwraca 1) oraz pewien minimalny podzbiór pozostałych implikantów prostych.

1.3 Sposób reprezentowania funkcji logicznej

Na ćwiczeniach będziemy używali następującego sposobu reprezentowania funkcji. Zapis $f = \sum(0, 1, 4, 5)$ oznacza funkcję $f(x, y, z) = \bar{x} \bar{y} \bar{z} + \bar{x} \bar{y} z + x \bar{y} \bar{z} + x \bar{y} z$. Każda z liczb pojawiających się po znaku $\sum$ oznacza jeden minterm. To jak on wygląda można odczytać przekształcając tę liczbę do systemu dwójkowego ($0 = 000_{(2)}, 1 = 001_{(2)}, 4 = 100_{(2)}, 5 = 101_{(2)}$). Liczba zmiennych jest domyślna.

2 Minimalizacja układów logicznych metodą siatek (map) Karnaugh

Omówiliśmy działanie siatek dla 3 i 4 zmiennych (także z tzw. kombinacjami nadmiarowymi). Istnieją siatki dla 5 i 6 zmiennych, ale są raczej niepraktyczne.

3 Metoda Quine'a-McCluskey'a

Przykład. $f = \sum\{2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 15\}$

Zaczynamy od podgrupowania pod względem liczby niezanegowanych zmiennych implikantów odpowiadających mintermom w niezminimalizowanej dysjunkcyjnej postaci f (lewa tabelka). Następnie dla każdej pary implikantów różniących się na dokładnie jednej pozycji wpisujemy do drugiej tabeli nowy implikant, eliminując zmienną, która rozróżnia dane implikanty (na jej pozycji piszemy „-”). Dla każdego implikantu, który udało się w ten sposób połączyć z jakimś innym stawiamy w pierwszej tabeli znak „v”. Zauważ, że szukając dających się połączyć implikantów wystarczy rozważać tylko sąsiednie grupy. Krok powtarzamy, uzyskując na podstawie drugiej tabeli tabelę trzecią (implikanty z dwoma kreskami). Usuujemy powtarzające się z niej implikanty.

	xyzt		xyzt		xyzt
(2)	0010 v	(2,3)	001- v	(2,3,6,7)	0-1-
(3)	0011 v	(2,6)	0-10 v	(2,3,10,11)	-01-
(5)	0101 v	(2,10)	-010 v	(2,6,3,7)	0-1-
(6)	0110 v	(3,7)	0-11 v	(2,10,3,11)	-01-
(10)	1010 v	(6,7)	011- v	(3,7,11,15)	-11
(7)	0111 v	(5,7)	01-1	(3,11,7,15)	-11
(11)	1011 v	(3,11)	-011 v		
(15)	1111 v	(10,11)	101- v		
		(7,15)	-111 v		
		(11,15)	1011 v		

Zauważamy, że w trzeciej tabeli nic już się nie da połączyć. Wypisujemy wszystkie implikanty, przy których nie postawiliśmy znaku „v”. Zauważ, że są to implikanty proste. W naszym przypadku: 01-1 (pokrywający kombinacje 5 i 7), 0-1- (2,3,6,7) -01- (2,3,10,11), -11 (3,7,11,15). Tylko one będą brane pod uwagę przy tworzeniu postaci minimalnej. W naszym przypadku wszystkie uzyskane implikanty są **zasadnicze**, czyli dla każdego z nich istnienie kombinacja wejściowa pokrywana tylko przez niego (np. dla pierwszego jest to kombinacja 5). Implikanty zasadnicze z definicji muszą znaleźć się w wyniku. Uzyskujemy już zatem odpowiedź: $f = \bar{x}yt + \bar{x}z + \bar{y}z + zt$.

W trudniejszych przykładach może się okazać, że implikanty zasadnicze nie pokrywają wszystkich wejść (a może nawet w ogóle nie ma implikantów zasadniczych). Wtedy potrzebna jest dodatkowa procedura. Została ona omówiona na wykładzie na przykładzie funkcji $g = \sum\{0, 2, 3, 4, 5, 7\}$. Tak naprawdę, w przypadkach z jakimi spotkamy się na ćwiczeniach taka procedura nie jest nie-

będna - zazwyczaj łatwo „zgadnąć” minimalny zestaw implikantów i uzasadnić, że mniejszego rzeczywiście nie ma.

3.1 Uwaga o złożoności

Problem „dla zadanej w postaci tabeli wejść funkcji sprawdź, czy istnieje wyrażenie w postaci dysjunkcyjnej zawierające najwyżej k składników jest NP-zupełny (zauważ, że rozmiarem wejścia jest tutaj 2^n , gdzie n to liczba zmiennych). Dlatego, dla dużej liczby wejść stosuje się algorytmy heurystyczne znajdujące szybko przybliżone rozwiązania. Trudna okazuje się głównie część druga, czyli procedura znajdowania minimalnego zestawu implikantów prostych.

Uwaga o terminologii

Jedna ze studentek zwróciła mi uwagę, że w niestandardowy (albo mówiąc brutalniej: w niepoprawny) sposób używam pojęcia mintermów i makstermów. Zgodnie ze standardową definicją powinny one zawierać wystąpienia **wszystkich** zmiennych (być może w postaci zanegowanej). Przepraszam wszystkich, których w ten sposób zmyliłem. Poprawiłem już wcześniejsze materiały i nie powinno być już w nich tej nieścisłości.