# Architektury systemów komputerowych

Lista 1

7.X.2009

$x_1 = 10$ (minimum na bdb)

1. Sprawdź, że zbiór $\{0, 1\}$ z określonymi na wykładzie działaniami $+$ i $\cdot$ spełnia aksjomaty algebry Boole'a. Nie wolno Ci korzystać z podanych na wykładzie praw, a jedynie z tabeli prawdy działań $+$ i $\cdot$.

2. Wykaż, że zbiór o trzech elementach $a, b, c$, z operatorami binarnymi $+$ i $\cdot$ zdefiniowanymi następująco:

| + | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | a | a | a |
| b | a | b | b |
| c | a | b | c |

| · | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | a | b | c |
| b | b | b | c |
| c | c | c | c |

nie tworzy algebry Boole'a, nizależnie od tego, jaką przyjmiemy definicję działania $\bar{\cdot}$.

3. Korzystając z podanych na wykładzie aksjomatów algebry Boole'a udowodnij następujące prawa:
   a) $0 \cdot x = 0, \;\; 1 + x = 1$
   b) $x + x = x, \;\; x \cdot x = x$
   c) $x(x + y) = x, \;\; x + xy = x$

4. Korzystając z podanych na wykładzie aksjomatów i praw algebry Boole'a udowodnij następujące równoważności:
   b) $xy + x\overline{y} = x$
   c) $(x + y) \cdot (x + \overline{y}) = x$

5. Korzystając z podanych na wykładzie aksjomatów algebry Boole'a uprość wyrażenia:
   a) $xz + xy\overline{z}$
   b) $\overline{x + y} \cdot \overline{\overline{x} + \overline{y}}$
   c) $x + \overline{x}y + \overline{x}\,\overline{y}$
   d) $(x\overline{y} + \overline{w}z)(w\overline{x} + y\overline{z})$

6. Napisz wyrażenie odpowiadające dopełnieniu funkcji $F$, a następnie uprość je stosując prawo de Morgana:
$$F(w, x, y, z) = xy\overline{z}\overline{(\overline{y}z + x)} + (\overline{w}yz + \overline{x})$$

7. Utwórz tablice prawdy dla następujących wyrażeń:
   a) $xyz + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$
   b) $(x + y)(x + z)(\overline{x} + z)$

8. Zdefiniujmy nowe działanie $\oplus$ (odpowiadające bramce XOR) na zbiorze $\{0, 1\}$: $x \oplus y = 1$ wtedy, gdy dokładnie jeden z argumentów $x$, $y$ jest równy 1. Udowodnij lub obal następujące prawo:
$$x \oplus (y \cdot z) = (x \oplus y) \cdot (x \oplus z).$$

9. Pokaż, jak operator $\oplus$ wyrazić za pomocą tylko alternatywy i negacji.

10. Oto tablica prawdy pewnej funkcji boolowskiej:

| $x$ | $y$ | $z$ | $F$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

    Zapisz odpowiadające jej wyrażenie w dysjunkcyjnej postaci normalnej.

11. Zapisz wyrażenie z poprzedniego zadania w koniunkcyjnej postaci normalnej. Udowodnij, że każda funkcja boolowska może być opisana przy użyciu wyrażenia w koniunkcyjnej postaci normalnej.

12. Udowodnij, że wyrażenie $\overline{x}\ \overline{y} + xy + \overline{x}z$ nie da się zapisać w dysjunkcyjnej postaci normalnej przy użyciu mniej niż trzech mintermów.

Na koniec zadanie dodatkowe dla ambitnych studentów. Tak naprawdę, to nie jest ono ściśle związane z naszym przedmiotem, ale ponieważ wprowadziliśmy pojęcie algebr Boole'a, to może ktoś będzie miał ochotę zbadać pewną ich własność. W zadaniu tym oczekuję ścisłego, matematycznego dowodu.

13. (*, 3 pkt.) Udowodnij, że liczba elementów każdej skończonej algebry Boole'a jest potęgą dwójki. *Wskazówka:* Pokaż, że elementy algebr Boole'a zachowują się tak, jak podzbiory w zbiorze podzbiorów pewnego zbioru skończonego. Mówiąc ściślej pokaż, że każda algebra Boole'a jest *izomorficzna* ze zbiorem podzbiorów pewnego zbioru skończonego (z działaniami sumy, przekroju i dopełnienia zbiorów). Rozpocząć możesz od wskazania odpowiedników podzbiorów jednoelementowych - będą nimi elementy, które nie dadzą się zapisać w postaci $a \vee b$ w sposób nietrywialny.

*Emanuel Kieroński*