

Architektury systemów komputerowych

Lista 1

7.X.2008

$x_1 = 10$ (minimum na bdb)

1. Sprawdź, że zbiór $\{0, 1\}$ z określonymi na wykładzie działaniami $+$ i $\cdot$ spełnia aksjomaty algebry Boole'a. Nie wolno Ci korzystać z podanych na wykładzie praw, a jedynie z tabeli prawdy działań $+$ i $\cdot$.
2. Wykaż, że zbiór o trzech elementach a, b, c , z operatorami binarnymi $+$ i $\cdot$ zdefiniowanymi następująco:

$+$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	b
c	a	b	c

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	c

nie tworzy algebry Boole'a, niezależnie od tego, jaką przyjmiemy definicję działania $\bar{\cdot}$.

3. Korzystając z podanych na wykładzie aksjomatów algebry Boole'a udowodnij następujące prawa:

- a) $0 \cdot x = 0, \quad 1 + x = 1$
- b) $x + x = x, \quad x \cdot x = x$
- c) $x(x + y) = x, \quad x + xy = x$

4. Korzystając z podanych na wykładzie aksjomatów i praw algebry Boole'a udowodnij następujące równoważności:

- b) $xy + x\bar{y} = x$
- c) $(x + y) \cdot (x + \bar{y}) = x$

5. Korzystając z podanych na wykładzie aksjomatów algebry Boole'a uprość wyrażenia:

- a) $xz + xy\bar{z}$
- b) $\overline{x + y} \cdot \overline{x + \bar{y}}$
- c) $x + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$
- d) $(x\bar{y} + \bar{w}z)(w\bar{x} + y\bar{z})$

6. Napisz wyrażenie odpowiadające dopełnieniu funkcji F , a następnie uprość je stosując prawo de Morgana:

$$F(w, x, y, z) = xy\bar{z}(\overline{\bar{y}z + x}) + (\bar{w}yz + \bar{x})$$

7. Utwórz tablice prawdy dla następujących wyrażeń:

- a) $xyz + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$
- b) $(x + y)(x + z)(\bar{x} + z)$

8. Zdefiniujmy nowe działanie $\oplus$ (odpowiadające bramce XOR) na zbiorze $\{0, 1\}$: $x \oplus y = 1$ wtedy, gdy dokładnie jeden z argumentów x, y jest równy 1. Udowodnij lub obal następujące prawo:

$$x \oplus (y \cdot z) = (x \oplus y) \cdot (x \oplus z).$$

9. Pokaż, jak operator $\oplus$ wyrazić za pomocą tylko alternatywy i negacji.
10. Oto tablica prawdy pewnej funkcji boolowskiej:

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Zapisz odpowiadające jej wyrażenie w dysjunkcyjnej postaci normalnej.

11. Zapisz wyrażenie z poprzedniego zadania w koniunkcyjnej postaci normalnej. Udowodnij, że każda funkcja boolowska może być opisana przy użyciu wyrażenia w koniunkcyjnej postaci normalnej.
12. Udowodnij, że wyrażenie $\bar{x}\bar{y} + xy + \bar{x}z$ nie da się zapisać w dysjunkcyjnej postaci normalnej przy użyciu mniej niż trzech mintermów.

Na koniec zadanie dodatkowe dla ambitnych studentów. Tak naprawdę, to nie jest ono ściśle związane z naszym przedmiotem, ale ponieważ wprowadziliśmy pojęcie algebr Boole'a, to może ktoś będzie miał ochotę zbadać pewną ich własność. W zadaniu tym oczekuję ścisłego, matematycznego dowodu.

13. (*, 3 pkt.) Udowodnij, że liczba elementów każdej skończonej algebry Boole'a jest potęgą dwójki. *Wskazówka:* Pokaż, że elementy algebr Boole'a zachowują się tak, jak podzbiory w zbiorze podzbiorów pewnego zbioru skończonego. Mówiąc ściślej pokaż, że każda algebra Boole'a jest *izomorficzna* ze zbiorem podzbiorów pewnego zbioru skończonego (z działaniami sumy, przekroju i dopełnienia zbiorów). Rozpocząć możesz od wskazania odpowiedników podzbiorów jednoelementowych - będą nimi elementy, które nie dadzą się zapisać w postaci $a \vee b$ w sposób nietrywialny.

Emanuel Kieroński