Egzamin połówkowy z analizy numerycznej 2005/06

9 grudnia 2005

1. (a) Podać definicję (i) uwarunkowania zadania (ii) algorytmu numerycznie poprawnego
   (b) Zbadać uwarunkowanie zadania obliczania wartości funkcji (a) $f(x) = x^{\alpha}$, (b) $f(x) = \sin x$
2. Podać dokładne sformułowanie zadania interpolacyjnego Lagrange'a, a następnie udowodnić, że ma ono dokładnie jedno rozwiązanie.
3. Niech będą dane liczby $t_0, t_1, \ldots, t_n, \in [a, b]$ oraz punkty na płaszczyźnie $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, gdzie
   $$x_i = x(t_i) \quad y_i = y(t_i) \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$$
   a x i y są pewnymi funkcjami zmiennej t. Krzywą interpolacyjną przechodzącą przez podane punkty definiujemy wzorem
   $$K_n(t) = [L_n(t), M_n(t)] \quad (a \le t \le b)$$
   gdzie wielomiany L_n i M_n interpolują odpowiednio funkcje x i y w węzłach $t_0, t_1, \ldots, t_n$. Której z poznanych postaci wielomianu interpolacyjnego należy użyć, żeby zminimalizować koszt wyznaczania punktu $K_n(t)$ na krzywej? Uzasadnić odpowiedź.
4. Niech dla funkcji $f(x) = e^x$ $(-1 \le x \le 1)$ wielomiany $u, w \in \prod_3$ będą takie, że
   (a) $u(x_k) = f(x_k)(k = 0, 1, 2, 3)$ gdzie $x_0 = -1, x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = 1$;
   (b) $w(x_k) = f(x_k)(k = 0, 1, 2, 3)$ gdzie t_0, t_1, t_2, t_3 są zerami wielomianu Czebyszewa T_4.

   Porównać oszacowania błędów $\max_{-1 \le x \le 1} |f(x) - u(x)|$ i $\max_{-1 \le x \le 1} |f(x) - w(x)|$.
5. (a) Podać dokładne sformułowanie algorytmu obliczania wartości wielomianu $w(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \ldots + c_nT_n(x)$ w punkcie x.
   (b) Uzasadnić algorytm podany w punkcie (a).
6. Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $[a, b]$, niech $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ będą parami różne i niech wielomian $L_n \in \prod_n$ spełnia warunki $L_n(x_i) = f(x_i)(i = 0, 1, \ldots, n)$. Wykazać, że wówczas dla każdego $x \in < a, b > \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ zachodzi równość
   $$f(x) - L_n(x) = f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$
7. Wykazać, że jeśli $w(x) = x^n$, to dla dowolnych parami różnych punktów $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ mamy
   $$w[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}] = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$$
8. Niech H będzie wielomianem, spełniającym następujące warunki:
   $$H(1) = 0, \quad H'(1) = 2, \quad H(2) = 3, \quad H'(2) = -1, \quad H''(2) = 0.$$
   Wyznaczyć zero funkcji $G(x) := H(x)/(x - 1)$, leżące w przedziale $(0, 1)$.