1. Co to znaczy, że metoda ma wykładnik zbieżności p. Co znaczy, że jest liniowa, a co, że kwadratowa. Zaproponuj efektywny algorytm obliczania pierwiastka z liczby w postaci $sm2^c$

2. Uzasadnić, że błąd interpolacji $\sin x + \cos x$ w $[-\pi/2, \pi/2]$ w jakiś zadanych węzłach o których wiemy, że $P = 0.12$, jest mniejszy od $2 \cdot 10^3$

3. KWadratury:

- Jak wyrażają się kwadratury:

  $$Q_n = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} x_k^{(n)},\ k \in N$$

  która dla dowlonego wielomianu $w \in \prod_{2n+1}$ spełnia dokładniej ...

  $$Q_n = \int_{-1}^{1} \frac{w(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Obliczyć współczynniki $A_k^{(2)}$ $(k = 0, 1, 2)$

4. Jaka jest ogólna postać wielomianu w (bez ograniczenia jego stopnia), interpolującego funkcję f w różnych punktach $x_0, x_1, \ldots, x_n$?

5. Była podana jakaś funkcja i napisać, czy jest to NFSI3, z uzasadnieniem dla wszystkich warunków.

6. Co to są wielomiany ortogonalne, w jaki sposób można je wyznaczyć, do czego są używane w aproksymacji i do czego w całkowaniu numerycznym.

7. Uzasadnić, że $w = \frac{1}{2}$ jest pierwszym wielomianem optymalnym dla $\cos x$ w $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

8. Opisać konstrukcję tablicy Romberga i uzupełnić podaną tablicę.

$T_{00} = 28.8112$			
$T_{01} = \ldots$	$T_{10} = \ldots$		
$T_{02} = 24.2328$	$T_{11} = 23.9181$	$T_{20} = \ldots$	
$T_{03} = \ldots$	$T_{12} = \ldots$	$T_{21} = 23.9147$	$T_{30} = \ldots$

9. Niech f będzie funkcją podaną wzorem:

$$f(x) = 1410T_1(x) + 1525T_2(x) + 1683T_3(x)\ (x \in [-1, 1])$$

gdzie T_1, T_2, T_3 są wielomianami Czebyszewa. Dla jakich stałych rzeczywistych a, b, c wielkość

$$E(a, b, c) = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - c - bx - ax^2|$$

przyjmuje najmniejszą wartość?

10. Wyznaczyć pierwszy wielomian opytmalny dla funkcji $f(x) = \frac{1}{x+3}$ w sensie aproksymacji jednostajnej w przedziale $[-1, 1]$.

11. Dla jakich wartości A, B, C równość

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = Af(-1) + Bf(0) + Cf(1)$$

zachodzi dla dowolnego wielomianu f stopnia co najwyżej piątego?

12. Funkcja sklejana 3 stopnia:

- Jak definujemy NFSI3,
- Ile działań wymaga obliczenie NFSI3 interpolującej funkcje w $n+1$ punktach,
- Jaki jest koszt obliczenia wartośći w 100 puntach,
- Jakie są zalety NFSI3 w porównaniu z wielomianem interpolacyjnym.

13. Uzasadnić, że $w(x) = x^2 - \frac{1}{8}$ jest drugim wielomianem optymalnym dla funkcji $f(x) = x^4$ w sensie aproksymacji jednostajnej na przedziale $[-1, 1]$

14.Niech f będzie taka, że istnieje całka z $\int_{-1}^{1} f(x)^2 dx$. Opisać sposób wyznaczania dla danej liczby dodatniej ϵ wielomianu w możliwie niskiego stopnia, spełniającego niewówność:
$\int\limits_{-1}^{1} [f(x) - w(x)]^2 < \epsilon$

15. Kwadratury

- Dobrać n tak, żeby złożony wzór Simpsona przylbiżał wartość całki $\int_0^\pi \sin x dx$ z błędem mnieszym niż $\epsilon = 2 \cdot 10^{-5}$
- Jaka wartość n gwarantuje, że z błąd przybliżenia tej całki dawanego przez złożony wzór Trapezów jest mnijszy niż ϵ

16. Sparawdzić czy istnieje NFSI3 interpolujca $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ w punktach $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ postaci :

$$s(x) = u(x) \text{ dla } (0 \leqslant x \leqslant 1)$$
$$s(x) = (x-2)^2 \text{ dla } (1 \leqslant x \leqslant 2)$$

17. $w_n \in \prod_{n-1}$. Pokazać, że dla parami różnych $x_0, x_1, ..., x_n$ zachodzi $f[x_0 * x_1 ... x_n] = 0$

18. w_n^* - n-ty wielomian w sensie aporksymacji średnio kwadratowej wzgledem funkcji f (jest w przestrzeni funkcji całkowalnych 2). Pokazać ze: $< f - w_n^*, u_n >= 0$ dla każdego $u_n \in \prod_n$, jeśli $< f, g >= \int\limits_a^b p(x)f(x)g(x)$ gdzie $p(x)$ jest funkcja wagową.

19.Pokazać,ze $w_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k T_k(x)$ jest n-tym wielomianem optymalnym dla $f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k T_k(x)$ w sensie aproksymacji jednostajnej na przedziale $[-1, 1]$ gdzie $T_n(x)$ jest n-tym wielomianem Czebyszewa, a $a_n \in R$.

20.$\int_0^1 e^{x^2}$. Podać możliwie jak najmniejsze n, dla którego $|I - T_n| < 10^{-3}$, gdzie T_n jest złożonym wzorem trapezów.

21. Czy istnieją P, Q, R takie że dla dowolnego $z \in \prod_5$

$$\int_{-1}^{1} \frac{z(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = Pz(-1) + Qz(0) + Rz(1)$$

22. Udowodnić, że jeżeli α jest podwójnym zerem funkcji f to zbieżność metody Newtona zastosowanej do znalezienia zera funkcji f jest liniowa.

23. Mamy funkcje sklejaną s na trzech węzłach $-1, 0, 1$ dla przedziału $[-1, 0]$ stosowany jest wielomian $p_1(x) = 1 + c(x+1)^3$. Dla przedziału $[0, 1]$ stosowany jest jakiś wielomian $p_2(x)$. Znajdź ten wielomian i odpowiedz na pytanie: Jakie musi być c, aby zachodziło $s(1) = -1$