Ćwiczenia z analizy numerycznej **M7.**

Tomasz Łoszko

23 listopada 2009

M7.1.

$$x_j \leq x \leq x_{j+1}$$

$$a + j \cdot h \leq x \leq a + (j+1) \cdot h$$

$$j \cdot h \leq x - a \leq (j+1) \cdot h$$

$$j \leq \frac{x-a}{h} \leq (j+1)$$

Niech $j = \lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor$, oraz jeżeli $x = b$ to $j = n - 1$.W ięc $j = 0, 1, 2, ..., n - 1$.

1. Zauważmy, że:

$$\Pi_{i=0}^{n} |x - x_i| \leq |(x - x_j) \cdot (x - x_{j+1})| \cdot P(x) \cdot Q(x)$$

   Ponieważ $x_0 \leq ... \leq x_j \leq x \leq x_{j+1} \leq ... \leq x_n$ to"

$$P(x) = \Pi_{i=0}^{j-1}(x - x_i) = \Pi_{i=0}^{j-1}|x - x_i|$$

$$Q(x) = \Pi_{i=j+2}^{n}(x_i - x) = \Pi_{i=j+2}^{n}|x_i - x| = \Pi_{i=j+2}^{n}|x - x_i|$$

$$|(x - x_j) \cdot (x - x_{j+1})| = |x - x_j| \cdot |x - x_{j+1}|$$

$$\Pi_{i=0}^{n}|x - x_i| \leq |(x - x_j) \cdot (x - x_{j+1})| \cdot \Pi_{i=0}^{j-1}(x - x_i) \cdot \Pi_{i=j+2}^{n}(x_i - x) = \Pi_{i=0}^{n}|x - x_i|$$

2.

$$|(x - x_j) \cdot (x - x_{j+1})| \leq \frac{h^2}{4}$$

   na przedziale $x \in [x_j, x_{j+1}]$:

$$|(x - x_j) \cdot (x - x_{j+1})| = (x - x_j) \cdot (x_{j+1} - x) \leq \frac{h^2}{4}$$

$$(x - x_j) \cdot (x_{j+1} - x) - \frac{h^2}{4} \leq 0$$

$$-x^2 + x \cdot (x_j + x_{j+1}) - x_j \cdot x_{j+1} - \frac{h^2}{4} \leq 0$$

$$\delta = (x_j + x_{j+1})^2 - 4 \cdot (x_j \cdot x_{j+1}) - h^2 = (x_j - x_{j+1})^2 - h^2 = [(x_j - x_{j+1}) - h] \cdot [(x_j - x_{j+1}) + h] = 0$$

   widzimy że funkcja ta ma ramiona skierowane w dół i jedno miejsce zerowe więc $|(x - x_j) \cdot (x - x_{j+1})| \leq \frac{h^2}{4}$

3. $\dots \le x_j \le x \le x_{j+1}$ więc $\forall_{i \le j+1} x_{j+1} - x_i \ge x - x_i$ czyli $P(x_{j+1}) = \Pi_{i=0}^{j-1}(x_{j+1} - x_i) \ge \Pi_{i=0}^{j-1}(x_- x_i) = P(x)$ analogicznie dla Q(x)

   Zauważmy że:

$$P(x_{j+1}) = \Pi_{i=0}^{j-1}(x_{j+1} - x_i) = \Pi_{i=0}^{j-1}(a + (j+1)\cdot h - a - i \cdot h) = \Pi_{i=0}^{j-1}(j+1-i)\cdot h = (j+1)\cdot h \cdot j \cdot h \cdot ... \cdot 2 \cdot h = (j+1)! \cdot h^j$$

$$Q(x_j) = \Pi_{i=j+2}^{n}(x_i - x_j) = \Pi_{i=j+2}^{n}(a + i \cdot h - a - j \cdot h) = \Pi_{i=j+2}^{n}(i-j)\cdot h = 2 \cdot h \cdot ... \cdot (n-j)\cdot h = (n-j)! \cdot h^{n-j-1}$$

   więc:

$$P(x_{j+1}) \cdot Q(x_j) = (j+1)! \cdot h^j \cdot (n-j)! \cdot h^{n-j-1} = (j+1)! \cdot (n-j)! \cdot h^{n-1} \le n! \cdot h^{n-1}$$

$$\Pi_{i=0}^{n}|x - x_i| \le |(x - x_j)\cdot(x - x_{j+1})| \cdot P(x) \cdot Q(x) \le |(x - x_j)\cdot(x - x_{j+1})| \cdot P(x_{j+1}) \cdot Q(x_j) = \frac{1}{4} \cdot h^{n+1} \cdot n!$$

M7.2.

Niech L_n będzie wielomianem interpolującym $f(x) = \sin(2x)$ w równoodległych punktach $x_i = \frac{i}{n}$ $(i = 0, 1, \dots n)$. Wiemy, że $f(x) = \sin(2x)$ jest funkcją ciągła, oraz że każda jej pochodna jest ciągła, gdyż:

$$(\sin(2x))^{(n)} = (-1)^{n+1} 2^n \sin \ \mathit{or} \ \cos(2x)$$

Zatem zawsze prawdziwym jest wzór:

$$\max_{0 \le x \le 1} |f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1} \cdot P_{n+1}}{(n+1)!}$$

gdzie

$$M_{n+1} = \max_{0 \le x \le 1} \left| f^{(n+1)}(x) \right| = 2^{n+1}$$

oraz, dla równoodległych węzłów postaci $x_k = 0 + k \cdot \frac{1}{n}$ dla $(i = 0, 1, \dots n)$:

$$P_{n+1} \le n! \cdot n^{-n-1}$$

zatem:

$$\max_{0 \le x \le 1} |f(x) - L_n(x)| \le \frac{2^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^{n+1}} = \frac{2^{n+1}}{(n+1) \cdot n^{n+1}}$$

jaka wartość n gwarantuje nam, że zachodzi:

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1) \cdot n^{n+1}} \le 10^{-4} = 0.0001$$

Policzmy kilka początkowych wyrazów:

n	$\frac{2^{n+1}}{(n+1)\cdot n^{n+1}}$
1	2
2	0.3333
3	0.04938
4	0.00625
5	0.000068266

Nierównosć zachodzi zatem dla $n \ge 5$.

M7.3.

Niech L_n będzie wielomianem interpolującym $f(x) = \exp(x)$ w zerach $(n+1)$szego wielomianu Czebyszewa. Wiemy, że $f(x) = e^x$ jest funkcją ciągła, oraz że każda jej pochodna jest ciągła. Zatem zawsze prawdziwym jest wzór:

$$\max_{-1 \le x \le 1} |f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1} \cdot P_{n+1}}{(n+1)!}$$

gdzie $M_{n+1} = \max_{-1 \le x \le 1} \left| f^{(n+1)}(x) \right| = e$ oraz $P_{n+1} = 2 \cdot \left(\frac{1+1}{4}\right)^{n+1} = 2 \cdot 2^{-n-1} = 2^{-n}$
zatem:

$$\max_{-1 \le x \le 1} |f(x) - L_n(x)| \le \frac{e}{2^n \cdot (n+1)!}$$

jaka wartość n gwarantuje nam, że zachodzi:

$$\frac{e}{2^n \cdot (n+1)!} \le 10^{-5} \Leftrightarrow e \le \frac{2^n \cdot (n+1)!}{10^5} \Rightarrow 271828.18 \dots \le 2^n \cdot (n+1)!$$

liczymy parę wyrazów początkowych:

n	$2^n \cdot (n+1)!$
4	1920
5	23040
6	322560

Zatem nierówność jest spełniona dla $n \ge 6$.

M7.4.

$$S(x) = \begin{cases} x^3 + x - 1 & \text{for } x \in [-1, 0] \\ x^3 - x - 1 & \text{for } x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$S'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{for } x \in [-1, 0] \\ 3x^2 - 1 & \text{for } x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$S''(x) = \begin{cases} 6x & \text{for } x \in [-1, 0] \\ 6x & \text{for } x \in [0, 1] \end{cases}$$

1. Widzimy że $S'(x)$ nie jest ciągła na przedziale $[-1, 1]$
2. $0 \ne S''(-1) \ne S''(-1) \ne 0$

Więcej rzeczy nie sprawdzimy bo nie wiemy jaką funkcję intrapolujemy i nie znamy węzłów

M7.5.

M7.5.1. indukcja

Dowód indukcyjny, teza:

$$\begin{cases} M_k = u_k + q_k \cdot M_{k+1} & \text{dla } (k = n-2, \dots, 1) \\ M_{n-1} = u_{n-1} \end{cases}$$

ponieważ $M_n = 0$ wystarczy pokazać jedynie pierwszy wzór:

1. $k = 0$ Ponieważ $q_0 = u_0 = 0$:
$$M_0 = u_0 + q_0 \cdot M_1 = 0$$
2. $k = 1$ Podstawiamy do równania:
$$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k) M_{k+1} = d_k$$
$$0 + 2M_1 + (1 - \lambda_k) M_{1+1} = d_1$$

$$p_1 M_1 = u_1 p_1 + \lambda_1 u_0 + q_1 p_1 M_{1+1}$$

$$M_1 = u_1 + q_1 M_{1+1}$$

3. zakładamy, że teza zachodzi dla $k-1$ czyli:

$$M_{k-1} = u_{k-1} + q_{k-1} \cdot M_k$$

4. sprawdzamy dla k: rozpiszmy jedno z równań układu:

$$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1-\lambda_k) M_{k+1} = d_k$$

$$\lambda_k (u_{k-1} + q_{k-1} \cdot M_k) + 2M_k + (1-\lambda_k) M_{k+1} = d_k$$

$$\lambda_k u_{k-1} + (\lambda_k q_{k-1} + 2) M_k + (1-\lambda_k) M_{k+1} = d_k$$

$$(\lambda_k q_{k-1} + 2) M_k = d_k + (\lambda_k - 1) M_{k+1} - \lambda_k u_{k-1}$$

$$M_k \cdot p_k = q_k \cdot p_k \cdot M_{k+1} + u_k \cdot p_k$$

$$M_k = u_k + q_k \cdot M_{k+1}$$

M7.5.2. koszt algorytmu

$n-1$ razy obliczamy p_k, q_k, u_k
$n-2$ razy obliczamy M_k

Obliczenie p_k to 1 dodawanie i 1 mnożenie
q_k to 1 dodawanie i 1 mnożenie
u_k to 1 dodawanie i 2 mnożenia
M_k to 1 dodawanie i 1 mnożenie
W sumie: $4 \cdot n - 5$ dodawań i $5 \cdot n - 6$ mnożeń

M7.6. nie chce mi się

M7.7.

Można zgapić też ze str 349 pdf'a kinkejda twierdzenie 6.4.1, str 34 skryptu SLE Twierdzenie Holladay'a

M7.7.1.

$$\int \left[s''(x)\right]^2 dx \;=\; s'(x)s''(x) - \int s'(x)s^{(3)}(x)dx \;=\; s'(x)s''(x) - s^{(3)}(x) - \int s'(x)dx \;=\; s'(x)s''(x) - s^{(3)}(x)s(x)dx$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[s''(x)\right]^2 dx = s'(x_k)s''(x_k) - s'(x_{k-1})s''(x_{k-1}) - s^{(3)}\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)[s(x_k) - s(x_{k-1})] \text{ bo s''' jest odwzorowaniem liniowym } =$$

$$= s'(x_k)M_k - s'(x_{k-1})M_{k-1} - \frac{M_k - M_{k-1}}{h_k}[f(x_k) - f(x_{k-1})] = s'(x_k)M_k - s'(x_{k-1})M_{k-1} - (M_k - M_{k-1})f[x_{k-1}, x_k]$$

A zatem, zmieniając zakresy całeczkowania:

$$\int_a^b [s''(x)]^2\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [s''(x)]^2\,dx = \sum_{k=1}^{n} [s'(x_k)M_k - s'(x_{k-1})M_{k-1}] - \sum_{k=1}^{n} (M_k - M_{k-1}) f[x_{k-1}, x_k] =$$

$$= s'(x_n)M_n - s'(x_0)M_0 - \sum_{k=1}^{n} M_k f[x_{k-1}, x_k] + \sum_{k=1}^{n} M_{k-1} f[x_{k-1}, x_k] = \sum_{k=1}^{n-1} M_k f[x_k, x_{k+1}] - \sum_{k=1}^{n-1} M_k f[x_{k-1}, x_k]$$

M7.7.2. wersja z dokładnym opisem

Pokażemy, że że $\int_a^b [s'']^2 dx = \sum_{k=1}^{n-1}(f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k])M_k$

Rozkładamy naszą całkę na sumę całek z przedziałów $[x_{k-1}; x_k]$, by nastepnie rozwalić naszą całeczkę przez części:

$$\int_a^b [s'']^2 dx = \int_a^b s'' \cdot s'' dx = \sum_{k=1}^{n} \left((s' \cdot s'')|_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} s' s''' dx \right)$$

Wiemy, że $S \in \prod_3$, więc $S''' \in \prod_0$, czyly jest stała! A stałe możemy wyrzucić przed całeczkę, więc:

$$\sum_{k=1}^{n} \left((s' \cdot s'')|_{x_{k-1}}^{x_k} - s''' \cdot \int_{x_{k-1}}^{x_k} s' dx \right)$$

A całka z S' to przecież S, więc:

$$\sum_{k=1}^{n} \left((s' \cdot s'')|_{x_{k-1}}^{x_k} - s''' \cdot S|_{x_{k-1}}^{x_k} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} (s'(x_k) \cdot s''(x_k) - s'(x_{k-1}) \cdot s''(x_{k-1}) - s''' \cdot (s(x_k) - s(x_{k-1})))$$

Rozwalamy na dwie sumy, zauważając, że przecież $s''(x_k) = M_k$

$$\sum_{k=1}^{n} (s'(x_k) \cdot M_k - s'(x_{k-1}) \cdot M_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} (s''' \cdot (s(x_k) - s(x_{k-1})))$$

No i teraz zauważamy, że w pierwszej sumie wszystkie składniki oprócz $k = 0$ i $k = n$ się zerują, zostaje tylko $s'(x_n)M_n - s'(x_0)M_0$, ale $M_0 = M_n = 0$, więc jajco. Zostaje druga suma:

$$-\sum_{k=1}^{n} \left(s^{(3)} \cdot (s(x_k) - s(x_{k-1})) \right)$$

wiemy, że $s(x_k) = f(x_k)$:

$$-\sum_{k=1}^{n} \left(s^{(3)} \cdot (f(x_k) - f(x_{k-1})) \right)$$

Oczywiście dlatego, że s'' jest liniowa, to $s^{(3)}$ będzie stała i równa współczynnikowi a w $s''(x) = ax+b$, znamy wartości $s''(x_k) = M_k$,więc możemy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} s''(x_{k+1}) = ax_{k+1} + b \\ s''(x_k) = ax_k + b \end{cases}$$

, odejmujemy stronami:

$$M_{k+1} - M_k = a(x_{k+1} - x_k) + b - b$$

$$s^{(3)} = a = \frac{M_{k+1} - M_k}{(x_{k+1} - x_k)}$$

No to wstawiamy do sumy:

$$-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{M_k - M_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \cdot (f(x_k) - f(x_{k-1}))\right)$$

Znowu rozkładamy na dwie sumy:

$$-\sum_{k=1}^{n}\left(M_k \cdot \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(M_{k-1} \cdot \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)$$

Teraz widzimy, że w pierwszej sumie ostatni składnik będzie zawierał $M_n = 0$, a w drugiej pierwszy składnik $M_0 = 0$, więc:

$$-\sum_{k=1}^{n-1}(M_k \cdot f[x_{k-1}, x_k]) + \sum_{k=2}^{n}(M_{k-1} \cdot f[x_{k-1}, x_k])$$

przesuwamy granicę sumowania, żeby było od $k = 1$ do $n - 1$

$$-\sum_{k=1}^{n-1}(M_k \cdot f[x_{k-1}, x_k]) + \sum_{k=1}^{n-1}(M_k \cdot f[x_k, x_{k+1}]) = \sum_{k=1}^{n-1} M_k \cdot (f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k])$$