Ćwiczenia z analizy numerycznej **M6.**

edhell

17 listopada 2009

M6.1.

Pokżaemy najpierw, że: $f[x_0,\ldots,x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(x_k - x_j)}$ Indukcja ze względu na n:

1. Dla $n = 0$

$$f[x_0] = \sum_{k=0}^{0} \frac{f(x_k)}{\prod_{j=0,j\neq 0}^{0}(x_k - x_j)} = f(x_0)/1 = f(x_0)$$

2. Dla $n = 1$

$$f[x_0, x_1] = \sum_{k=0}^{1} \frac{f(x_k)}{\prod_{j=0,j\neq k}^{1}(x_k - x_j)} = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)} = \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1} = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

3. zakładamy ze dla n zachodzi, sprawdzamy $n + 1$:

$$f[x_0,\ldots,x_n,x_{n+1}] = \frac{f[x_1,\ldots,x_{n+1}] - f[x_0,\ldots,x_n]}{x_{n+1} - x_0} = \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{f(x_k)}{\prod_{j=1,j\neq k}^{n+1}(x_k - x_j)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(x_k - x_j)}}{x_{n+1} - x_0} =$$

$$= \frac{\frac{f(x_{n+1})}{\prod_{j=1}^{n}(x_{n+1} - x_j)} - \frac{f(x_0)}{\prod_{j=1}^{n}(x_0 - x_j)}}{x_{n+1} - x_0} + \frac{\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\left(\frac{1}{\prod_{j=1,j\neq k}^{n+1}(x_k - x_j)} - \frac{1}{\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(x_k - x_j)}\right)}{x_{n+1} - x_0} =$$

$$= \frac{f(x_{n+1})}{\prod_{j=0}^{n}(x_{n+1} - x_j)} + \frac{f(x_0)}{\prod_{j=1}^{n+1}(x_0 - x_j)} + \frac{\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{(x_k - x_0) - (x_k - x_{n+1})}{\prod_{j=0,j\neq k}^{n+1}(x_k - x_j)}}{x_{n+1} - x_0} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f(x_k)}{\prod_{j=0,j\neq k}^{n+1}(x_k - x_j)}$$

Pokazaliśmy tym samym, że $f[x_0,\ldots,x_n,x_{n+1}] = \frac{f[x_1,\ldots,x_{n+1}] - f[x_0,\ldots,x_n]}{x_{n+1} - x_0}$

M6.2.

Indukcja po n...

1. Dla $n = 0$

$$f[x_0] = \sum_{k=0}^{0} g[x_0, \ldots, x_k] \cdot h[x_k, \ldots, x_0] = g[x_0] \cdot h[x_0] = f(x_0)$$

2. zakładamy ze dla itemów $\leq n$ zachodzi, sprawdzamy $n+1$:

$$f[x_0, \ldots, x_{n+1}] \overset{zad1.}{=} \frac{1}{x_{n+1} - x_0} \left(f[x_1, \ldots, x_{n+1}] - f[x_0, \ldots, x_n]\right) =$$

$$= \frac{1}{x_{n+1} - x_0} \left(\left(\sum_{k=1}^{n+1} g[x_1, \ldots, x_k] \cdot h[x_k, \ldots, x_{n+1}] \right) - \left(\sum_{k=0}^{n} g[x_0, \ldots, x_k] \cdot h[x_k, \ldots, x_n] \right) \right) = \cdots$$

krótkie wyjaśnienie:

$\frac{g[x_1,\ldots,x_k] - g[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k - x_0} = g[x_0, \ldots, x_k]$

stąd:

$g[x_1, \ldots, x_k] = (x_k - x_0) \cdot g[x_0, \ldots, x_k] + g[x_0, \ldots, x_{k-1}]$

oraz:

$h[x_k, \ldots, x_n] = (-1) \cdot (x_{n+1} - x_k) \cdot h[x_k, \ldots, x_{n+1}] + h[x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}]$

$$\cdots = \frac{1}{x_{n+1} - x_0} \left(\sum_{k=1}^{n+1} (x_k - x_0) \cdot g[x_0, \ldots, x_k] \cdot h[x_k, \ldots, x_{n+1}] + \sum_{k=1}^{n+1} g[x_0, \ldots, x_{k-1}] \cdot h[x_k, \ldots, x_{n+1}] - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{n} (x_k - x_{n+1}) \cdot h[x_k, \ldots, x_{n+1}] \cdot g[x_0, \ldots, x_k] - \sum_{k=0}^{n} g[x_0, \ldots, x_k] \cdot h[x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}] \right) \overset{\star}{=}$$

$$\overset{\star}{=} \frac{1}{x_{n+1} - x_0} \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_0 - x_k + x_{n+1}) \cdot g[x_0, \ldots, x_k] \cdot h[x_k, \ldots, x_{n+1}] + \sum_{k=0}^{n} g[x_0, \ldots, x_k] \cdot h[x_k + 1, \ldots, x_n] - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{n} g[x_0, \ldots, x_k] \cdot h[x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}] + (x_{n+1} - x_0) \cdot g[x_0, \ldots, x_{n+1}] \cdot h[x_{n+1}] - (x_0 - x_{n+1}) \cdot h[x_0, \ldots, x_{n+1}] \cdot g[x_0] \right) \overset{\star\star}{=}$$

$$\overset{\star\star}{=} \sum_{k=1}^{n} g[x_0, \ldots, x_k] \cdot h[x_k, \ldots, x_{n+1}] + \frac{1}{x_{n+1} - x_0} \left((x_{n+1} - x_0) \cdot g[x_0, \ldots, x_{n+1}] \cdot h[x_{n+1}] - (x_0 - x_{n+1}) \cdot h[x_0, \ldots, x_{n+1}] \cdot g[x_0] \right) \overset{\star\star\star}{=}$$

$$\overset{\star\star\star}{=} \sum_{k=0}^{n+1} g[x_0, \ldots, x_k] \cdot h[x_k, \ldots, x_{n+1}]$$

oznaczone przejścia:

$\star \rightarrow$ sprowadzamy dwie sumy zawierające () do wspólnych zakresów i odejmujemy je od siebie

$\star\star \rightarrow$ w jednej z sum zmniejszamy zakres, dzięki czemu możemy obie sumy wyzerować

$\star\star\star \rightarrow$ zjadamy dwa pozostałe elementy wielką sumą

M6.3.

Rozważmy funkcję $h(x) = x$, wtedy $f(x) = x \cdot g(x) = h(x) \cdot h(x)$

$$h[x_0, x_1] = \frac{h(x_1) - h(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} = 1$$
$$h[x_0, x_1, x_2] = \frac{1-1}{x_2 - x_0} = 0$$

wobec tego:

$$h[x_0, \ldots, x_k] = \begin{cases} x_0 & \text{for } x = 0\,, \\ 1 & \text{for } x = 1\,, \\ 0 & \text{for } x \geq 2\,. \end{cases}$$

Teraz korzystamy ze wzoru z zadania 2:

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} g[x_0, \ldots, x_k] \cdots h[x_k, \ldots, x_n] = x_n \cdot g[x_0, \ldots, x_n] + g[x_0, \ldots, x_{n-1}]$$

Można dalej rozwinąć ale po co?

M6.4.

było twierdzenie, że interpolując wielomian n-tego stopnia wystarczy n+1 weżłów, żeby otrzymać tożsamy z nim.

W interpolacji newtona mamy:

$L(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, ..., x_n] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$

W naszym przypadku mamy 6 węzłów. Z tego śmiesznego twierdzenia wiadomo, że wystarczą 4 węzły, żeby uzyskać nasz wielomian, biorąc więcej otrzymamy też ten wielomian. Mamy więc

$L(x) = \sum_{i=0}^{5} f[x_0, ..., x_5] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$ $L(x) = \sum_{i=0}^{3} f[x_0, ..., x_3] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) + f[x_0, ..., x_4] \prod_{j=0}^{3} (x - x_j) + f[x_0, ...x_5] \prod_{j=0}^{4} (x - x_j)$

Dwa ostatnie składniki muszą być więc równe zero, wystarczy więc pokazać, że ilorazy 4 i 5 stopnia są równe zeru.

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, \ldots, x_i]$	$f[x_{i-3}, \ldots, x_i]$	$f[x_{i-4}, \ldots, x_i]$	$f[x_{i-5}, \ldots, x_i]$
0	-2	1	-	-	-	-	-
1	-1	4	3	-	-	-	-
2	0	11	7	2	-	-	-
3	1	16	5	-1	-1	-	-
4	2	13	-3	-4	-1	0	-
5	3	-4	-17	-7	-1	0	0

M6.5.

indukcja po n:

$T_0(x) = 1 = \cos 0 = \cos(0 \cdot \arccos x)$
$T_1(x) = x = \cos(\arccos x)$

Zakładamy, że wzór zachodzi dla $k \leq n$, sprawdzamy dla $n+1$:

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= 2 \cdot x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x) = 2 \cdot \cos(\arccos x) \cdot \cos(n \cdot \arccos x) - \cos\left((n-1)\arccos x\right) = \\ &\overset{wzor\ na\ sume\ cosinusow}{=} \cos\left((n+1)\arccos x\right) + \cos\left((n-1)\arccos x\right) - \cos\left((n-1)\arccos x\right) = \\ &= \cos\left((n+1)\arccos x\right) \end{aligned}$$

M6.6.

Pokażemy, że wielomian $n+1$-ty ma $n+1$ pierwiastków:

$$\cos((n+1)\arccos x) = 0 \Leftrightarrow (n+1)\arccos x = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi \qquad \text{gdzie } k \in Z \cap [-\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}]$$

dalej:

$$\arccos x = \frac{2k+1}{2n+2}\pi \Leftrightarrow x = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi \qquad \text{dla } k \in \{0,1,\dots,n\}$$

Przeciwdziedzina arccos $\in [0,\pi]$ więc: $\frac{2k+1}{2n+2}\pi \in [0,\pi]$, $\frac{2k+1}{2n+2} \in [0,1]$. Stąd już widać bardzo dobrze, że $k \in \{0,1,\dots,n\}$

M6.7. trzeba uogólnić lub uzasadnić

Dla $x \in [-1,1]$.. a więc źle:

$$|\cos(n\cdot\arccos x)| = 1 \Leftrightarrow n\cdot\arccos x = k\cdot\pi \qquad k \in Z\cap[0,n]$$

$$\arccos x = \frac{k\cdot\pi}{n} \Leftrightarrow x = \cos\frac{k\cdot\pi}{n} \qquad k \in \{0,1,\dots,n\}$$

jest tak bo przeciwdziedzina arccos $\in [0,\pi]$

M6.8.

Niech $\widetilde{w_k}\ (x) = \frac{1}{2}\cdot C_k\cdot T_0(x) + C_{k+1}\cdot T_1(x) + \dots + C_n\cdot T_{n-k}(x)$, pokażemy, że $\frac{1}{2}(B_k - B_{k+2}) = \widetilde{w_k}\ (x)$, da nam to szukaną zależność, bo $\widetilde{w_0}\ (x) = w_n(x)$.

1. $k = n$

$$\frac{1}{2}(B_n - B_{n+2}) = \frac{1}{2}(2x\cdot 0 - 0 + C_n) = \frac{1}{2}C_n = \widetilde{w_k}\ (x)$$

2. $k = n-1$

$$\frac{1}{2}(B_{n-1} - B_{n+1}) = \frac{1}{2}B_{n-1} = \frac{1}{2}(2xB_n - 0 + C_{n-1}) = \frac{1}{2}C_{n-1} + xB_n = \frac{1}{2}C_{n-1} + xC_n = \widetilde{w_{n+1}}\ (x)$$

3. Zakłdamy, że wzór zachodzi dla $k' \geq k+1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(B_k - B_{k+2}) &= \frac{1}{2}(2xB_{k+1} - 2B_{k+2} + C_k) = \frac{1}{2}C_k + xB_{k+1} - B_{k+2} = \\
&= \frac{1}{2}C_k + xB_{k+1} - \frac{1}{2}B_{k+2} - \frac{1}{2}B_{k+2} = \\
&= \frac{1}{2}C_k + xB_{k+1} - \frac{1}{2}B_{k+2} - \frac{1}{2}(B_{k+3}\cdot 2x - B_{k+4} + C_{k+2}) = \\
&= \frac{1}{2}C_k + 2x\cdot\frac{1}{2}(B_{k+1} - B_{k+3}) - \frac{1}{2}(B_{k+2} - B_{k+4}) - \frac{1}{2}C_{k+2} = \\
&= \frac{1}{2}C_k + 2x\cdot \widetilde{w_{k+1}}\ (x) - \widetilde{w_{k+2}}\ (x) - \frac{1}{2}C_{k+2} = \\
&= \frac{1}{2}C_k + xC_{k+1} + C_{k+2}\big(2xT_1(x) - T_0(x)\big) + C_{k+3}\big(2xT_2(x) - T_1(x)\big) + \dots \\
&\dots + C_n\big(2xT_{n-k-1}(x) - T_{n-k-2}\big) = \\
&= \frac{1}{2}C_k + C_{k+1}T_1(x) + \dots + C_nT_{n-k}(x)
\end{aligned}$$