Ćwiczenia z analizy numerycznej **M10.**

edhl

15 grudnia 2009

M10.1.

M10.1.1. obliczamy całkę

$$I_p(f) = \int\limits_a^b p(x)f(x)\ dx$$

M10.1.2. wykazać coś śmiesznego

M10.2.

M10.2.1. całka

$$\int\limits_c^d q(t)h(t)\ dt = \{x = \alpha t + \beta, dx = \alpha dt\} = \int\limits_{\alpha c+\beta}^{\alpha d+\beta} q\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right) h\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)\ \frac{dx}{\alpha} =$$

$$= \int\limits_a^b p\left(\alpha\frac{x-\beta}{\alpha}+\beta\right) f\left(\alpha\frac{x-\beta}{\alpha}+\beta\right)\ \frac{dx}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\int\limits_a^b p(x)f(x)\ dx = \frac{1}{\alpha}\left(R_n(f) + Q_n(f)\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left(\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f)\right) = \sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{\alpha} f(\alpha t_k + \beta) + R_n^{\star}(h) = \sum_{k=0}^{n} B_k h(t_k) + R_n^{\star}(h) = Q_n^{\star}(h) + R_n^{\star}(h)$$

M10.2.2. rząd

Zauważmy, że jeśli $f \in \prod_m$ to również $h \in \prod_m$. Weźmy dowolny $w^{\star} \in \prod_{n-1}$. Wtedy $w(x) = w^{\star}\left(\frac{1}{\alpha}(x-\beta)\right)$ też jest wielomianem z $\prod_{n-1}$. Zatem $R_n(w) = 0$. Oraz:

$$w(\alpha x + \beta) = w^{\star}\left(\frac{1}{\alpha}(x + \beta - \beta)\right) = w^{\star}(x),$$

a więc $R_n^{\star}(w^{\star}) = \frac{1}{\alpha}R_n(w) = 0$. Ponieważ, z założenia, rząd $Q_n = r$, to $\exists w \in \prod_r \setminus \prod_{r-1}$ taki, że $R_n(w) \neq 0$. Ale wtedy $w(x) = w^{\star}\left(\frac{1}{\alpha}(x-\beta)\right) \in \prod_r \setminus \prod_{r-1}$ oraz $R_n^{\star}(w^{\star}) = \frac{1}{\alpha}R_n(w) \neq 0$. Zatem rząd $Q_n^{\star} = r$.

M10.3.

Zgodnie ze wzorem wyprowadzonym na wykładzie (lol):

$$A_k^{(n)} = h_n(-1)^{n-k}\frac{1}{n!}\binom{n}{k}\int\limits_0^n t(t-1)(t-2)\cdot\ldots\cdot(t-k+1)(t-k-1)\cdot\ldots\cdot(t-n)dt$$

zatem:

$$A_{n-k}^{(n)} = h_n(-1)^k \frac{1}{n!}\binom{n}{n-k}\int\limits_0^n t(t-1)(t-2)\cdot\ldots\cdot(t-n+k+1)(t-n+k-1)\cdot\ldots\cdot(t-n)dt$$

Przeliczmy całkę:

$$\int\limits_0^n t(t-1)(t-2)\cdot\ldots\cdot(t-n+k+1)(t-n+k-1)\cdot\ldots\cdot(t-n)\ dt = \{t=n-u,\ dt=-du,\ \text{granice: } n=n-u, 0=n-u\}$$

$$= \int\limits_n^0 (n-u)(n-1-u)\cdot\ldots\cdot(k+1-u)(k-1-u)\cdot\ldots\cdot(-u)\ (-du) =$$

$$= \int\limits_0^n (n-u)(n-1-u)\cdot\ldots\cdot(k+1-u)(k-1-u)\cdot\ldots\cdot(-u)\ du =$$

$$= \int\limits_0^n (-1)^n(u-n)(u-n+1)\cdot\ldots\cdot(u-k-1)(u-k+1)\cdot\ldots\cdot(u)\ du = \{u=t,\ du=dt\} =$$

$$= \int\limits_0^n (-1)^n t(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-n+k+1)(t-n+k-1)\cdot\ldots\cdot(t-n)\ dt =$$

$$= (-1)^{n-k}(-1)^k\int\limits_0^n t(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-n+k+1)(t-n+k-1)\cdot\ldots\cdot(t-n)\ dt$$

Zauważmy, że $(-1)^k = (-1)^{-k}$, wtedy możemy podstawić wyliczoną całkę do wzoru na A_{n-k}, zawartość całki skróćmy do literki X:

$$A_{n-k}^{(n)} = h_n(-1)^k\frac{1}{n!}\binom{n}{n-k}(-1)^{n-k}(-1)^{-k}\int X =$$

$$= h_n(-1)^{n-k}\frac{1}{n!}\binom{n}{k}\int X = A_k^{(n)}$$

M10.4.

Pokażemy, że $A_k/(b-a)\in\mathbb{Q}$. Więc:

$$A_k/(b-a) = \frac{(-1)^{n-k}}{n\cdot n!\cdot(n-k)!}\cdot\int\limits_0^n\prod_{j=0,j\neq k}^n(t-j)dt$$

W naturalny sposób wszystko przed całką $\in\mathbb{Q}$, rozpatrzmy więc samą całkę. Iloczyn wewnątrz niej to nic innego jak wielomian postaci $\sum\limits_{i=0}^n(a_n\cdot t^n)$, gdzie $a_n\in\mathbb{Z}$. Zatem całkę rozkładamy na sumę całek: $\sum\limits_{i=0}^n\int\limits_0^n(a_i\cdot t^i)$. Teraz możemy sprowadzić to do sumy:

$$\sum_{i=0}^n\left(\frac{a_n\cdot n^{i+1}}{i+1}-\frac{a_n\cdot 0^{i+1}}{i+1}\right) = \sum_{i=0}^n\left(\frac{a_n\cdot n^{i+1}}{i+1}\right)$$

Teraz widzimy, że $a_i, n^{i+1}, n+1\in\mathbb{Q}$, więc $\frac{a_n\cdot n^{i+1}}{i+1}\in\mathbb{Q}$ zatem cała suma $\in\mathbb{Q}$, więc całe $A_k/(b-a)\in\mathbb{Q}$.

M10.5.

M10.6.

M10.7.

Indukcja po m (numer kolumny). 1. $m = 0$

$$T_{0,k} = T_{2^k} = h_k 2 \sum_{i=0}^{2^k}{}'' f\left(x_i^{(k)}\right) = \qquad \text{gdzie } h_k = \tfrac{b-a}{2^k},\ x_i^{(k)} = a + ih_k$$

$$= \sum_{i=1}^{2^k} \frac{f\left(x_i^{(k)}\right) + f\left(x_{i-1}^{(k)}\right)}{2} \left(x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}\right) = \{\text{f ciągła}\} = \sum_{i=1}^{2^k} f\left(\xi_i^{(k)}\right)\left(x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}\right) \qquad \text{gdzie } \xi_i^{(k)} \in \left(x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k)}\right)$$

Zatem $T_{0,k}$ jest sumą reimannowską dla f na przedziale [a,b], dla podziału [a,b] na 2^k równych podprzedziałów. Ponadto, średnia tego podziału P_k to $\sigma(P_k) = \frac{b-a}{2^k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$ Stąd $T_{0,k} = S(f, P_k) \xrightarrow{k\to\infty} \int\limits_a^b f$, bo f jest ciągła, więc całkowalna.

2. Załóżmy, że $T_{m-1,k} \xrightarrow{k\to\infty} \int\limits_a^b f$:

$$T_{m,k} = \frac{4^m T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k}}{4^m - 1} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{4^m \int\limits_a^b f - \int\limits_a^b f}{4^m - 1} = \int\limits_a^b f$$