Sprawdzian nr 1

1. Proszę zaproponować sposób uniknięcia utraty cyfr znaczących wyniku w związku z obliczaniem wartości funkcji

   (a) $1/(\sqrt{x^2+1}+x)$;
   (b) $\cos^2 x - 1$.

2. Obliczyć wskaźnik uwarunkowania i przedyskutować uwarunkowanie zadanie obliczania wartości funkcji

   (a) $f(x) = 1/(x^2+a)$;
   (b) $f(x) = \sqrt{x^2+a} - x$, gdzie a jest stałą.

3. Załóżmy, że a, b i c są liczbami maszynowymi. Proszę wyjaśnić, czy następujący algorytm obliczania wartości wyrażenia $w := ca^2 - b^2c$ jest numerycznie poprawny:

$$p := a - b,$$
$$q := a + b,$$
$$r := pq,$$
$$w := cr.$$

4. Funkcja $f(x) = x^{20} - 1$ $(x > 0)$ ma dokładnie jeden (pojedynczy!) pierwiastek $\alpha = 1$.

   (a) Jaką postać przybiera wzór iteracyjny opisujący metodę Newtona wyznaczania α? Jaka jest przybliżona wartość x_{k+1}, jeśli x_k jest DUŻĄ liczbą?

   (b) Przyjmując $x_0 = \frac{1}{2}$ obliczyć za pomocą metody Newtona przybliżenia x_1 i x_2. Skomentować wyniki.

5. Niech ciąg $\{x_k\}$ będzie określony następująco:

$$x_{k+1} := x_k + (2 - e^{x_k})\frac{x_k - x_{k-1}}{e^{x_k} - e^{x_{k-1}}} \qquad (k = 1, 2, \ldots;\ x_0 := 0,\ x_1 := 1).$$

   Ile wynosi granica $\lim_{k\to\infty} x_k$?

Sprawdzian nr 2

1. Według danych demograficznych ludność Polski liczyła

   32 mln w 1970 r.,
   35 mln w 1980 r.,
   37 mln w 1990 r.
   i 38 mln w 2000 r.

   Ilu – w przybliżeniu – mieszkańców będzie liczyć Polska w 2010 r.?

   <u>*Dobra rada*</u>: *Proszę traktować* milion *(mln) jako jednostkę obliczeniową, a więc* ***nie dopisywać sześciu zer*** *po liczbach 32, 35 itd.*

2. Niech w będzie wielomianem najniższego możliwego stopnia, spełniającym warunki

$$w\,(1 + 0.1\,k) = \ln\,(1 + 0.1\,k) \qquad (k = 1,\,2, \ldots, 9,\,10).$$

   Proszę podać oszacowanie błędu $|w(x) - \ln x)|$, prawdziwe dla dowolnego $x \in [1.1, 2]$.

3. Proszę znaleźć wielomian w możliwie najniższego stopnia, spełniający warunki

$$w(-1) = w'(-1) = 0, \quad w(0) = 1, \quad w(1) = w'(1) = 0.$$

4. Niech s oznacza naturalną funkcję sklejaną III stopnia, spełniającą warunki

$$s(-1) = 1, \qquad s(0) = 2, \qquad s(1) = -1.$$

Czy to prawda, że funkcja s wyraża się następującym wzorem:

$$s(x) = \begin{cases} -x^3 - 3x^2 - x + 2 & (x \in [-1,\, 0]), \\ x^3 - 3x^2 - x + 2 & (x \in [\ \ 0, 1])? \end{cases}$$

Koniecznie proszę uzasadnić odpowiedź!

Sprawdzian nr 3

1. Metodą eliminacji <u>z pełnym wyborem elementów głównych</u> proszę rozwiązać układ równań liniowych

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = [9,\, 6,\, 14]^T.$$

Podać wszystkie pośrednie macierze i wektory!

2. Proszę wyznaczyć takie stałe a, b i c, żeby wyrażenie

$$\sqrt{\int_0^1 [x\sqrt{x} - ax^2 - bx - c]^2\, dx}$$

miało najmniejszą możliwą wartość.

3. Metodą faktoryzacji proszę rozwiązać układ równań liniowych

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = [4,\, 2,\, 4]^T.$$

Podać macierze trójkątne L i U!

4. Proszę wykazać, że wielomiany Czebyszewa, określone dla $x \in [-1,\, 1]$ wzorem

$$T_k(x) = \cos k \arccos x \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

są ortogonalne w przedziale $[-1,\, 1]$, z wagą $1/\sqrt{1 - x^2}$.