# Drugie kolokwium z analizy numerycznej 2005/06

21 stycznia 2006

1. Sprawdź, czy istnieje wielomian $u \in \Pi_3$ taki, że

$$s(x) = \begin{cases} u(x) & 0 \le x \le 1 \\ (2-x)^3 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

jest naturalną funkcją sklejaną interpolującą $f(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$ w punktach $0, 1, 2$.

2. Niech $P_k^*$ będą wielomianami ortonormalnymi, o współczynniku wiodącym równym $a_k$. Udowodnić, że spełniają następującą zależność rekurencyjną:

$$P_0^*(x) = a_0 \quad P_1^*(x) = a_1(x - c_1)$$

$$\frac{a_{k-1}}{a_k} P_k^*(x) = (x - c_k) P_{k-1}^* - \frac{a_{k-2}}{a_{k-1}} P_{k-2}(x)$$

3. 

$$f(x) = x^{n+2} \quad w_n(x) = x^{n+2} - 2^{-n-1} \cos((n+2) \arccos x)$$

Udowodnić, że $w_n$ jest $n$-tym wielomianem optymalnym dla $f$ w sensie aproksymacji jednostajnej.

4. Niech $R_n$ oznacza kwadraturę przybliżającą całkę z $f(x) = \ln(2 + x)$ za pomocą złożonego wzoru trapezów. Wyznaczyć możliwie małe $n$, tak, żeby była spełniona nierówność

$$|I - R_n| < 10^{-7}$$

5. Czy istnieją takie współczynniki $A_0, A_1, A_2$, że dla każdego $w \in \Pi_5$ spełnione jest:

$$\int_{-1}^{1} \frac{w(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = A_0 w(-1) + A_1 w(0) + A_2 w(1)$$