
Analiza numeryczna

Stanisław Lewanowicz

Listopad 2006 r.

Interpolacja Lagrange’a

DEFINICJE, TWIERDZENIA, ALGORYTMY

1 Postaci wielomianu

OZNACZENIE: Symbol Π_n ($n \in \mathbb{N}$) będzie oznaczać zbiór wszystkich wielomianów stopnia nie wyższego niż n .

1.1 Postać naturalna (potęgowa)

$$w(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad (w \in \Pi_n).$$

Algorytm 1.1 (Horner) Dla danej wartości argumentu x obliczamy wielkości pomocnicze $w_0, w_1, \dots, w_n$ za pomocą wzorów

$$\begin{aligned} w_n &:= a_n, \\ w_k &:= w_{k+1} \times x + a_k \quad (k = n-1, n-2, \dots, 0). \end{aligned}$$

Otrzymujemy $w(x) = w_0$.

Twierdzenie 1.2 Algorytm Hornera jest numerycznie poprawny.

1.2 Postać Newtona

Dla danego układu parami różnych punktów rzeczywistych $x_0, x_1, \dots$ określmy takie wielomiany $p_0, p_1, \dots$, że $p_k \in \Pi_k$ ($k = 0, 1, \dots$) i że

$$(1.1) \quad p_0(x) \equiv 1,$$

$$(1.2) \quad p_k(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Definicja 1.3 Niech będzie $w \in \Pi_n$. Następujący wzór podaje postać Newtona wielomianu w :

$$(1.3) \quad w(x) = \sum_{k=0}^n b_k p_k(x).$$

Algorytm 1.4 (uogólniony algorytm Hornera)

$$\begin{aligned} w_n &:= b_n; \\ w_k &:= w_{k+1}(x - x_k) + b_k \quad (k = n-1, n-2, \dots, 0); \\ w(x) &= w_0. \end{aligned}$$

1.3 Postać Lagrange’a

Dla danego układu parami różnych punktów rzeczywistych $x_0, x_1, \dots, x_n$ wielomian $w \in \Pi_n$ można zapisać w postaci Lagrange’a

$$(1.4) \quad w(t) = \sum_{i=0}^n \sigma_i w(x_i) \prod_{j=0, j \neq i}^n (t - x_j),$$

gdzie

$$\sigma_i := 1 / \prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Stałe σ_k występujące we wzorach (1.4) oblicza się stosując następujący algorytm:

Algorytm 1.5 (Werner, 1984)

1. Obliczamy pomocnicze wielkości $a_k^{(i)}$ wg wzorów

$$\left. \begin{aligned} a_0^{(0)} &:= 1, & a_k^{(0)} &:= 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \\ a_k^{(i)} &:= a_k^{(i-1)} / (x_k - x_i), \\ a_i^{(k+1)} &:= a_i^{(k)} - a_k^{(i)} \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, \dots, i-1),$$

2. Wówczas $\sigma_k := a_k^{(n)}$ ($k = 0, 1, \dots, n$).

1.4 Kombinacja liniowa wielomianów Czebyszewa

Definicja 1.6 Wielomiany Czebyszewa (pierwszego rodzaju) T_k definiujemy w następujący sposób rekurencyjny:

$$\begin{aligned} T_0(x) &\equiv 1; & T_1(x) &= x; \\ T_k(x) &= 2xT_{k-1} - T_{k-2} \quad (k = 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Każdy wielomian $w \in \Pi_n$ można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$(1.5) \quad w(x) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x) = \frac{1}{2} c_0 T_0(x) + \sum_{k=1}^n c_k T_k(x).$$

Wartość wielomianu podanego w powyższej postaci można obliczać za pomocą następującego algorytmu Clenshawa:

Algorytm 1.7 Aby obliczyć wartość wielomianu (1.5) w punkcie x określamy pomocniczo wielkości $B_0, B_1, \dots, B_n$ wzorami

$$\begin{aligned} B_{n+2} &:= B_{n+1} := 0; \\ B_k &:= 2xB_{k+1} - B_{k+2} + c_k \quad (k = n, n-1, \dots, 0). \end{aligned}$$

Wówczas $w(x) = \frac{1}{2}(B_0 - B_2)$.

2 Interpolacja Lagrange’a

2.1 Postać Lagrange’a wielomianu interpolacyjnego

Zadanie interpolacyjne Lagrange’a. Dla danych: $n \in \mathbf{N}, x_0, x_1, \dots, x_n$ ($x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$), funkcji f określonej w punktach $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ znaleźć wielomian $L_n \in \Pi_n$, spełniający następujące warunki:

$$(2.1) \quad L_n(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Twierdzenie 2.1 Zadanie interpolacyjne Lagrange'a ma zawsze jednoznaczne rozwiązanie, które można wyrazić wzorem

$$(2.2) \quad L_n(x) := \sum_{k=0}^n f(x_k) \lambda_k(x),$$

gdzie

$$(2.3) \quad \lambda_k(x) := \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Definicja 2.2 Wielomian L_n nazywamy wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a. Wzór (2.2) nazywamy wzorem interpolacyjnym Lagrange'a.

2.2 Postać Newtona wielomianu interpolacyjnego

Definicja 2.3 Niech funkcja f będzie określona w parami różnych punktach $x_0, x_1, \dots$. Iloraz różnicowy k -tego rzędu (krócej: k -ty iloraz różnicowy) ($k = 0, 1, \dots$) funkcji f w punktach $x_0, x_1, \dots, x_k$ oznaczamy symbolem $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ i określamy następującym wzorem:

$$(2.4) \quad f[x_0, x_1, \dots, x_k] := \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j \neq i}^k (x_i - x_j)}.$$

2.3 Własności ilorazów różnicowych

1. Iloraz $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ jest symetryczną funkcją zmiennych $x_0, x_1, \dots, x_k$.
2. Iloraz różnicowy zależy liniowo od funkcji, dla której został utworzony, tj. jeśli $f = g + ch$ (c - stała), to $f[x_0, x_1, \dots, x_k] = g[x_0, x_1, \dots, x_k] + ch[x_0, x_1, \dots, x_k]$.
3. Jeśli $w \in \Pi_m \setminus \Pi_{m-1}$, to $w[x_0, x_1, \dots, x_k]$ jest wielomianem stopnia $(m - k)$ -tego zmiennej x ; w szczeg. iloraz $w[x_0, x_1, \dots, x_m]$ jest stałą, a $w[x_0, x_1, \dots, x_{m+1}]$ jest zerem.
4. Prawdziwy jest związek rekurencyjny

$$(2.5) \quad f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

gdzie $f[x_j] := f(x_j)$ ($j \geq 0$).

Wzór interpolacyjny Newtona:

$$(2.6) \quad L_n(x) = \sum_{k=0}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k] (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}).$$

Wartość wielomianu L_n wyrażonego za pomocą wzoru Newtona (2.6) obliczać stosując uogólniony schemat Hornera (zob. algorytm 1.4).

Schemat obliczeń wszystkich ilorazów $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ ilustruje następujący diagram:

$$(2.7) \quad \begin{array}{ccccccc} x_0 & \underline{f(x_0)} & \searrow & & & & \\ x_1 & f(x_1) & \rightarrow & \underline{f[x_0, x_1]} & & & \\ x_2 & f(x_2) & & f[x_1, x_2] & & & \\ \dots & \dots & & \dots & & & \\ x_{n-1} & f(x_{n-1}) & \searrow & f[x_{n-2}, x_{n-1}] & \cdots & \underline{f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]} & \searrow \\ x_n & f(x_n) & \rightarrow & f[x_{n-1}, x_n] & \cdots & f[x_1, x_2, \dots, x_n] & \rightarrow \underline{f[x_0, x_1, \dots, x_n]} \end{array}$$

Strzałki wskazują, które obliczone wcześniej ilorazy wykorzystuje się przy tworzeniu następnych. Zauważmy, że we wzorze (2.6) występują tylko ilorazy z przekątnej głównej tabeli (podkreślone), lecz dla ich obliczenia trzeba wyznaczyć również pozostałe ilorazy.

2.4 Reszta wzoru interpolacyjnego

Twierdzenie 2.4 Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $[a, b]$, niech $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ będą parami różne i niech wielomian $L_n \in \Pi_n$ spełnia warunki

$$(2.8) \quad L_n(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Wówczas dla każdego $x \in \llbracket a, b \rrbracket \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ zachodzi równość

$$(2.9) \quad f(x) - L_n(x) = f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] p_{n+1}(x),$$

gdzie

$$p_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

Jeśli funkcja f ma w przedziale $[a, b]$ ciągłą $(n+1)$ -szą pochodną, wówczas wzór (2.9) można zapisać w postaci

$$(2.10) \quad f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) p_{n+1}(x),$$

gdzie ξ_x jest pewną liczbą (zależną od x) z przedziału (a, b) .

Twierdzenie 2.5 Jeśli $f \in C^{n+1}[a, b]$, $x, x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, to istnieje taki punkt $\xi \in (a, b)$, że

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

2.5 Wybór węzłów interpolacyjnych

Rozważania powyższe wskazują, że wielkość błędu interpolacji $|f(x) - L_n(x)|$ zależy od wielkości $\max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$, a także od wielkości $\max_{a \leq x \leq b} |p_{n+1}(x)|$, związanej z rozkładem węzłów w przedziale $[a, b]$.

Można udowodnić następujące twierdzenie:

Wniosek 2.6 Jeśli funkcja f ma w przedziale $[a, b]$ ciągłą $(n+1)$ -szą pochodną, to

$$(2.11) \quad \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1} P_{n+1}}{(n+1)!},$$

gdzie

$$M_{n+1} := \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|,$$

$$P_{n+1} := \max_{a \leq x \leq b} |p_{n+1}(x)|.$$

Prawa strona nierówności (2.11) jest najmniejsza i równa

$$(2.12) \quad 2 \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{b-a}{4} \right)^{n+1}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$p_{n+1}(x) = 2 \left(\frac{b-a}{4} \right)^{n+1} T_{n+1}(t), \quad t = \frac{2}{b-a} \left(x - \frac{a+b}{2} \right),$$

tj. gdy węzłami $x_0, x_1, \dots, x_n$ są punkty

$$(2.13) \quad x_k^* = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_{n+1,k} \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

gdzie z kolei

$$(2.14) \quad t_{n+1,k} = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

(zera $(n+1)$ -go wielomianu Czebyszewa T_{n+1}).

W wypadku węzłów równoodległych $x_k = a + kh$ ($k = 0, 1, \dots, n$; $h := (b-a)/n$) mamy

$$\frac{1}{4}(n-1)! \left(\frac{b-a}{n} \right)^{n+1} \leq P_{n+1} \leq n! \left(\frac{b-a}{n} \right)^{n+1},$$

natomiast w wypadku węzłów Czebyszewa (2.13) mamy

$$P_{n+1} = 2 \left(\frac{b-a}{4} \right)^{n+1}.$$

2.6 Zbieżność ciągu wielomianów interpolacyjnych

Niech $\{x_{nk}\}$ będą punktami przedziału $[a, b]$ wypełniającymi tablicę trójkątną

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & x_{00} \\ & & & & & & x_{10} & x_{11} \\ & & & & & & x_{20} & x_{21} & x_{22} \\ & & & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & x_{n0} & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \\ & & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Niech będzie $x_{ni} \neq x_{nj}$ ($i \neq j$; $n = 1, 2, \dots$). Ponadto niech $\{L_n\}$ będzie ciągiem wielomianów interpolacyjnych określonych tak, by dla ustalonej funkcji f zachodziły warunki

$$L_n(x_{nk}) = f(x_{nk}) \quad (k = 0, 1, \dots, n; n = 0, 1, \dots).$$

Pytanie. Czy dla dowolnego $x \in [a, b]$ jest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x) = f(x)?$$

Twierdzenie 2.7 (Runge) Niech będzie $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$, $[a, b] = [-1, 1]$, $x_{nk} = -1 + \frac{2k}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, n$; $n > 0$). Ciąg $\{L_n(x)\}$ jest zbieżny do $f(x)$ tylko dla $|x| \leq 0.72668\dots$ i rozbieżny dla $|x| > 0.72668\dots$

Węzły $\{x_{nk}\}$ były równoodległe (dla ustalonego n). Może dałoby się wybrać je tak zręcznie, by proces interpolacji był zbieżny? Niestety, następne twierdzenie zawiera pesymistyczną odpowiedź.

Twierdzenie 2.8 (Faber) Dla każdej tablicy węzłów $\{x_{nk}\}$ istnieje taka funkcja ciągła w przedziale $[a, b]$, do której ciąg wielomianów interpolacyjnych nie jest zbieżny jednostajnie (tj. taka, że $\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - L_n(x)| \not\rightarrow 0$).

Dla specyficznych „Czebyszewowskich” węzłów interpolacyjnych

$$(2.15) \quad x_{nk} := \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi \quad (k = 0, 1, \dots, n; n = 0, 1, \dots)$$

można dla dostatecznie regularnych funkcji zagwarantować zbieżność, mianowicie zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.9 (Kryłow) Niech dana będzie funkcja $f \in C^1[-1, 1]$ i niech $\{L_n\}$ będzie ciągiem wielomianów interpolujących funkcję f w węzłach (2.15). Wówczas dla każdego $x \in [-1, 1]$ jest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x) = f(x).$$

Można zapytać, czy - wobec braku zbieżności ciągu $\{L_n(x)\}$ do $f(x)$ - interpolacja jest przydatna w praktyce? Odpowiedź brzmi: ZWYKLE JEST, bowiem najczęściej błąd $|f(x) - L_n(x)|$ maleje dla $n = 1, 2, \dots, n_{crit}$. Dla $n \leq n_{crit}$ można otrzymać dobre przybliżenia, natomiast dla dużych n ODRADZA się stosowanie interpolacji.