Pracownia z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 2

Początek zapisów: **8 listopada 2010 r.**

Termin realizacji: **5 grudnia 2010 r.**

Punktacja (podana przy każdym zadaniu): ***10 albo 12 punktów***

Każde z zadań może być wybrane najwyżej przez cztery osoby (cztery zespoły dwuosobowe — w wypadku zadań P2.20–P2.24) spośród wszystkich zapisanych na pracownię.

P2.1. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Wyznaczyć rozkład danej macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ na iloczyn czynników trójkątnych. Korzystając z powyższego wyniku rozwiązać układ równań $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Wykonać obliczenia m. in. dla ***macierzy Hilberta*** $A = [a_{ij}]$, gdzie

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \qquad (i,\, j = 1, 2, \ldots, n)$$

i ***macierzy Pei***

$$A := \begin{bmatrix} d & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & d & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & d \end{bmatrix}$$

(Zauważmy, że dla $d \approx 1$ macierz Pei jest źle uwarunkowana!) Omówić wyniki, podając wartość $\|\boldsymbol{b} - A\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty$, gdzie $\tilde{\boldsymbol{x}}$ jest obliczonym rozwiązaniem.

P2.2. $\boxed{\text{12 punktów}}$ Załóżmy, że znany jest już rozkład LU macierzy nieosobliwej $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. W wielu zadaniach praktycznych należy wyznaczyć rozkład LU macierzy A^* danej wzorem $A^* := A + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^t$, gdzie $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ są danymi wektorami. Patrz np. [1, §6.3]. Zaproponuj szybki algorytm znajdowania rozkładu LU macierzy A^*. Wykonaj odpwiednie testy numeryczne sprawdzające jego stabilność i skuteczność.

Literatura

[1] A. Kiełbasiński, H. Schwetlick, *Numeryczna algebra liniowa*, WNT, 1992.

P2.3. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Zaproponować algorytm rozwiązywania układu n równań liniowych $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ($A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$) przy założeniu, że elementy a_{ij} są równe zeru, jeśli $|i - j| > m$, gdzie m jest ustaloną liczbą, znacznie mniejszą niż n (np. równą 1 lub 2). Wykonać obliczenia kontrolne i omówić wyniki.

P2.4. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Korzystając z rozkładu danej macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ na iloczyn czynników trójkątnych, wyznaczyć macierz A^{-1}. Wykonać obliczenia dla macierzy Hilberta i dla macierzy Pei (zob. zadanie **P2.1**) stopnia n, przyjmując wartości $n = 3, 6, 9, 12$ (lub zbliżone do nich) oraz różne wartości parametru d (dla $d \approx 1$ macierz Pei jest źle uwarunkowana!). Dla kontroli obliczyć obliczyć element o maksymalnej wartości bezwzględnej macierzy $AB - I$, gdzie $B = \mathit{fl}(A^{-1})$.

P2.5. $\boxed{\text{12 punktów}}$ *Pseudoodwrotnością* macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ nazywamy macierz $A^+ \in \mathbb{R}^{m\times n}$ spełniającą następujące warunki:

$$AA^+A = A, \qquad A^+AA^+ = A^+, \qquad (AA^+)^T = AA^+, \qquad (A^+A)^T = A^+A$$

(patrz np. [1, str. 261]; jakie może być zastosowanie macierzy A^+?). Załóżmy, że rząd r macierzy A jest równy jednej z liczb m, n. Opracuj efektywny pod względem numerycznym sposób wyznaczania pseudoodwrotności danej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

Literatura

[1] A. Kiełbasiński, H. Schwetlick, *Numeryczna algebra liniowa*, WNT, 1992.

P2.6. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Zaproponować algorytm rozwiązywania układu n równań liniowych $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ($A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$) przy założeniu, że $a_{1n} \neq 0$, $a_{n1} \neq 0$, a pozostałe elementy a_{ij} są równe zeru, jeśli $|i-j| > 1$. Wykonać obliczenia kontrolne i omówić wyniki, podając wartość $\|\boldsymbol{b} - A\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty$, gdzie $\tilde{\boldsymbol{x}}$ jest obliczonym rozwiązaniem.

P2.7. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Stosując metodę eliminacji z wyborem częściowym elementów głównych obliczyć wyznacznik macierzy A. Zauważyć, że dla uniknięcia nadmiaru lub niedomiaru warto informację o $\det A$ podać w postaci:

$$\sigma, \quad \log|\det A|,$$

gdzie $\sigma := \operatorname{sgn}\ \det A$. Wykonać obliczenia kontrolne m.in. dla macierzy Pei i Hilberta (zob. zadanie **P2.1**) i omówić wyniki, przyjmując różne wartości parametrów n i d (w tym – $d \approx 1$).

P2.8. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Niech dana będzie macierz nieosobliwa $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oraz wektory $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \ldots, \boldsymbol{b_m} \in \mathbb{R}^n$. Zaproponuj i zrealizuj szybki algorytm rozwiązywania m układów równań postaci

$$A\boldsymbol{x_k} = \boldsymbol{b_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

P2.9. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Niech dana będzie nieosobliwa macierz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i wektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Niech $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ będzie rozwiązaniem układu równań $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, natomiast $\widetilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ jego przybliżeniem wyznaczonym w sposób numeryczny. Przyjmijmy $\boldsymbol{r} := \boldsymbol{b} - A\widetilde{\boldsymbol{x}}$. Z wiadomych powodów, najczęściej $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{\theta}$. Niech zatem $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{\theta}\}$ będzie (nieznanym) wektorem, dla którego zachodzi $\boldsymbol{x} = \widetilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{y}$. Zauważmy, że wtedy prawdziwa jest równość $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{r}$, której można użyć do numerycznego wyznaczenia przybliżenia wektora $\boldsymbol{y}$. Wykorzystaj podaną wyżej obserwację do zaproponowania atrakcyjnej numerycznie metody rozwiązywania układu równań liniowych. Przeprowadź odpowiednie testy numeryczne i wyciągnij wnioski.

P2.10. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Zaproponować warianty metody eliminacji

a) bez wyboru elementów głównych,

b) z wyborem częściowym elementów głównych,

rozwiązania układu równań liniowych $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ o macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ postaci

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{10}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \ldots & a_{n,n-3} & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Wykonać obliczenia kontrolne i omówić wyniki, podając wartość $\|\boldsymbol{b} - A\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty$, gdzie $\tilde{\boldsymbol{x}}$ jest obliczonym rozwiązaniem.

P2.11. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Opracować oszczędny algorytm wyznaczający rozkład trójkątny *LU niemal trójprzekątniowej* macierzy

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & c_2 & & & b_1 \\ b_2 & a_2 & c_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_n \\ c_1 & & & b_n & a_n \end{bmatrix},$$

która różni się od trójprzekątniowej tylko obecnością narożnych elementów b_1 i c_1. Warto wykorzystać to pokrewieństwo i algorytm rozkładu *LU* macierzy trójprzekątniowej. Wykonać obliczenia kontrolne i omówić wyniki.

P2.12. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Dla danej macierzy symetrycznej dodatnio określonej $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wyznaczyć macierz trójkątną dolną $L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o dodatnich elementach na głównej przekątnej i taką, że $LL^T = A$. Wykorzystać powyższy wynik do rozwiązania układu równań $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Wykonać obliczenia m. in. dla macierzy Hilberta i dla macierzy Pei (zob. zadanie **P2.1**) stopnia n, przyjmując wartości $n = 3, 6, 9, 12$ (lub zbliżone do nich) oraz różne wartości parametru d (dla $d \approx 1$ macierz Pei jest źle uwarunkowana!); wektor $\boldsymbol{b}$ można np. dobrać tak, by wektor $\boldsymbol{x}^T = [1, 1, \ldots, 1]$ był rozwiązaniem układu. Dla każdego zestawu danych podać wartość $\|\boldsymbol{b} - A\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty$, gdzie $\tilde{\boldsymbol{x}}$ jest obliczonym rozwiązaniem.

P2.13. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Macierz $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, odwrotna do danej macierzy nieosobliwej $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, spełnia równanie $AX = I$, gdzie $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest macierzą jednostkową. Zaproponować algorytm wykorzystujący ten fakt do wyznaczenia macierzy X. Wykonać obliczenia kontrolne i omówić wyniki.

P2.14. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Jak wiadomo, rzędem macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ nazywamy maksymalą liczbę jej liniowo niezależnych kolumn. Wykorzystując wiadomości podane na wykładzie z algebry liniowej, opracuj efektywny sposób wyznaczania rzędu macierzy. Następnie, wykonując odpowiednie testy numeryczne, sprawdź pod względem dokładności, skuteczności i stabilności zaproponowaną metodę.

P2.15. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Układ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ warto niekiedy zmodyfikować, wprowadzając nowe zmienne $y_i = d_i\, x_i$, gdzie d_i są dodatnie. W symbolice macierzowej mamy tu wzór $\boldsymbol{y} = D\boldsymbol{x}$, gdzie D jest macierzą przekątniową, o elementach $d_1, d_2, \ldots, d_n$ na przekątnej. Nowym układem równań jest $AD^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$. Jeśli $d_j = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |a_{ij}|$, to przekształcenie nazywamy *wyważaniem kolumn.*

Napisać program rozwiązujący układ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ metodą eliminacji z pełnym wyborem elementów głównych,

a) bez dodatkowych przekształceń układu,

b) z zastosowaniem wyważania kolumn,

c) z zastosowaniem analogicznie określonego wyważania wierszy.

Wykonać obliczenia kontrolne i omówić wyniki, podając dla każdego z wariantów wartość $\|\boldsymbol{b} - A\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty$, gdzie $\tilde{\boldsymbol{x}}$ jest obliczonym rozwiązaniem.

P2.16. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Zaproponować algorytm rozwiązania układu równań postaci

$$\begin{bmatrix} d_1 & c_1 & & & & \\ a_1 & d_2 & c_2 & & & \\ & a_2 & d_3 & c_3 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & a_{n-2} & d_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_{n-1} & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Czy uprości sprawę (jak?) założenie, że stałe a_i, c_i, d_i spełniają nierówności

$$|a_{i-1}| - |d_i| + |c_i| < 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ a_0 := c_n := 0)?$$

Wykonać obliczenia kontrolne i omówić wyniki, podając wartość $\|\boldsymbol{b} - A\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty$, gdzie $\tilde{\boldsymbol{x}}$ jest obliczonym rozwiązaniem.

P2.17. $\boxed{\text{12 punktów}}$ Ważnym z punktu widzenia zastosowań jest zadanie rozwiązywania *wielkich* układów równań liniowych $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, gdzie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest macierzą symetryczną dodatnio określoną. Jedną z często stosowanych metod jest tzw. *metoda Czebyszewa*, której zwięzły opis można znaleźć np. w [2, §6.8.3] (porównaj też z [1, str. 215]). Wykonując odpowiednie testy numeryczne, sprawdź pod względem dokładności, skuteczności i stabilności powyższą metodę. Porównaj ją z innymi omówionymi na wykładzie sposobami iteracyjnego rozwiązywania układów równań liniowych.

Literatura

[1] W. Cheney, D. Kincaid, *Analiza numeryczna*, WNT, 2006.

[2] M. Dryja, J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 2, WNT, 1988.

P2.18. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Za pomocą metod iteracyjnych Jacobiego i Seidela wyznaczyć przybliżone rozwiązanie $\tilde{\boldsymbol{x}}$ układu równań liniowych $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ($A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$), przyjmując $\tilde{\boldsymbol{x}} := \boldsymbol{x}^{(k)}$, gdzie k jest najmniejszą liczbą naturalną, dla której zachodzi nierówność

$$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\|_\infty / \|\boldsymbol{x}^{(k)}\|_\infty < \varepsilon.$$

Wykonać obliczenia kontrolne m.in. dla macierzy Pei i Hilberta (zob. zadanie **P2.1**) i omówić wyniki, podając wartość $\|\boldsymbol{b} - A\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty$, gdzie $\tilde{\boldsymbol{x}}$ jest obliczonym rozwiązaniem, jak również przyjmując $\varepsilon = 5\cdot 10^{-5}$, $5\cdot 10^{-7}$ oraz różne wartości parametrów n i d. Można założyć, że rozwiązaniem dokładnym jest wektor $\boldsymbol{e} := [1, 1, \ldots, 1]^T$ lub, inaczej mówiąc, że $\boldsymbol{b} := A\boldsymbol{e}$.

P2.19. 10 punktów Dla danej macierzy kwadratowej $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wartość własna λ i odpowiadający jej wektor własny $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ spełniają równanie $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Zastosować tzw. *metodę Jacobiego* diagonalizacji rzeczywistej macierzy symetrycznej $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ do znajdowania wszystkich jej wartości (wektorów) własnych. Zobacz np. [1, §10.4.1, s. 497]. Wykonać odpowiednie doświadczenia numeryczne z analizą złożoności, zbieżności i stabilności opracowanej metody.

Literatura

[1] A. Ralston, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, 1965.

P2.20. Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów Porównać na wybranych przykładach cztery warianty metody eliminacji rozwiązywania układów równań liniowych – pod względem dokładności wyników:

a) bez wyboru elementów głównych,

b) z pełnym wyborem elementów głównych,

c) z wyborem elementów głównych w kolumnach,

d) z wyborem elementów głównych w wierszach.

Wykonać obliczenia kontrolne i omówić wyniki, podając dla każdego z wariantów wartość $\|\boldsymbol{b} - A\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty$, gdzie $\tilde{\boldsymbol{x}}$ jest obliczonym rozwiązaniem.

P2.21. Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów Zrealizować następującą metodę rozwiązywania układów równań liniowych

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad (A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}).$$

a) Stosując metodę eliminacji z wyborem częściowym elementów głównych wyznaczyć takie macierze trójkątne L (dolną, z jedynkami na przekątnej) i U (górną) oraz macierz permutacji P, że $LU = PA$.

b) Rozwiązać układy trójkątne $L\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{b}$ i $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, otrzymując $\boldsymbol{x}_0 := fl(\boldsymbol{x})$.

c) Dla $k = 0, 1, \ldots, k_{\max}$ wykonać czynności:
   i. Obliczyć wektor $\boldsymbol{r}_k := \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_k$ z podwójną precyzją.
   ii. Obliczyć rozwiązanie $\boldsymbol{h}_k$ układu $A\boldsymbol{h}_k = \boldsymbol{r}_k$, wyznaczając kolejno rozwiązania układów trójkątnych $L\boldsymbol{g}_k = P\boldsymbol{r}_k$, $U\boldsymbol{h}_k = \boldsymbol{g}_k$.
   iii. Obliczyć $\boldsymbol{x}_{k+1} := \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{h}_k$.
   iv. Jeśli wartość $\|\boldsymbol{h}_k\|_\infty$ jest dostatecznie mała, przerwać obliczenia.

d) Ostatni wyznaczony wyraz ciągu $\{\boldsymbol{x}_k\}$ przyjąć za poprawione rozwiązanie układu.

Wykonać obliczenia kontrolne m.in. dla układów o macierzy Pei i Hilberta (zob. zadanie **P2.1**) przyjmując różne wartości parametrów n i d. Można założyć, że rozwiązaniem dokładnym jest wektor $\boldsymbol{e} := [1, 1, \ldots, 1]^T$ lub, inaczej mówiąc, że $\boldsymbol{b} := A\boldsymbol{e}$.

P2.22. Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów Każdą macierz kwadratową $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ można przedstawić w postaci $A = QR$, gdzie $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest *macierzą ortogonalną* spełniającą warunek $QQ^T = I_n$ (I_n – macierz jednostkowa stopnia n), natomiast $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest macierzą trójkątną górną. Opracuj metodę znajdującą *rozkład QR* danej macierzy kwadratowej A, a następnie wykorzystaj go do opracowania efektywnej metody rozwiązywania układów równań liniowych. Porównaj, pod względem złożoności obliczeniowej i skuteczności numerycznej, zaproponowaną metodę z eliminacją Gaussa.

P2.23. Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów Macierz kwadratową $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ można przedstawić w postaci iloczynu *macierzy ortogonalnej* $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ spełniającej warunek $QQ^T = I_n$ (I_n – macierz jednostkowa stopnia n) i macierzy trójkątnej górnej $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tzn. $A = QR$. Opracuj metodę wyznaczającą *rozkład QR* danej macierzy kwadratowej A, a następnie wykorzystaj go do opracowania efektywnej metody znajdowania macierzy A^{-1}. Porównaj, pod względem złożoności obliczeniowej i skuteczności numerycznej, zaproponowaną metodę ze sposobem znajdowania macierzy odwrotnej wykorzystującej rozkład LU macierzy.

P2.24. Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów Zrealizować następującą ***metodę sprzężonych gradientów*** rozwiązania układu

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

o macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrycznej, dodatnio określonej. Dla danych: n, A, $\boldsymbol{b}$, ϵ, δ oraz przybliżenia początkowego rozwiązania $\boldsymbol{x}_1$ obliczamy następujące stałe i wektory pomocnicze:

— $\boldsymbol{r}_1 := \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_1;\quad \boldsymbol{v}_1 := \boldsymbol{r}_1;\quad c_1 := \boldsymbol{r}_1^T\boldsymbol{r}_1;$

— dla $k = 1, 2, \ldots, n$
- jeśli $(\boldsymbol{v}_k^T\boldsymbol{v}_k)^{1/2} < \delta$, to skocz do (1);
- $\boldsymbol{z}_k := A\boldsymbol{v}_k;$
- $d_k := c_k/\boldsymbol{v}_k^T\boldsymbol{z}_k;$
- $\boldsymbol{x}_{k+1} := \boldsymbol{x}_k + d_k\boldsymbol{v}_k;$
- $\boldsymbol{r}_{k+1} := \boldsymbol{r}_k - d_k\boldsymbol{z}_k;$
- $c_{k+1} := \boldsymbol{r}_{k+1}^T\boldsymbol{r}_{k+1};$
- jeśli $c_{k+1} < \epsilon$, to skocz do (1);
- $\boldsymbol{v}_{k+1} := \boldsymbol{r}_{k+1} + (c_{k+1}/c_k)\boldsymbol{v}_k;$
- drukuj $k+1$, $\boldsymbol{x}_{k+1}$, $\boldsymbol{r}_{k+1}$;

—

(1) $\boldsymbol{x} :=$ ostatni wyznaczony wyraz ciągu $\{\boldsymbol{x}_k\}$.

Wykonać obliczenia m. in. dla macierzy Hilberta i dla macierzy Pei (zob. zadanie **P2.1**) stopnia n, przyjmując wartości $n = 3, 6, 9, 12$ (lub zbliżone do nich) oraz różne wartości parametru d (dla $d \approx 1$ macierz Pei jest źle uwarunkowana!).