Pracownia z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 1

Początek zapisów: **11 października 2010 r.**

Termin realizacji: **7 listopada 2010 r.**

Punktacja (podana przy każdym zadaniu): ***8, 10 albo 12 punktów***

Każde z zadań może być wybrane najwyżej przez cztery osoby (cztery zespoły dwuosobowe — w wypadku zadań P1.22 i P1.23) spośród wszystkich zapisanych na pracownię.

P1.1. 10 punktów Stosując strategię *dziel i zwyciężaj* wartość sumy $\sum_{k=1}^{8} a_k$ można wyznaczyć wykonując obliczenia zgodnie z następującym diagramem:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
a_1 \arrow[dr] & & a_2 \arrow[dl] & & a_3 \arrow[dr] & & a_4 \arrow[dl] & & a_5 \arrow[dr] & & a_6 \arrow[dl] & & a_7 \arrow[dr] & & a_8 \arrow[dl] \\
& s_{12} \arrow[drr] & & & & s_{34} \arrow[dll] & & & & s_{56} \arrow[drr] & & & & s_{78} \arrow[dll] & \\
& & & s_{14} \arrow[drrrr] & & & & & & & & s_{58} \arrow[dllll] & & & \\
& & & & & & & s_{18} & & & & & & &
\end{tikzcd}
$$

gdzie $s_{ij} := a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j$. Zaproponuj podobny sposób wyznaczania wartości wyrażenia $\sum_{k=1}^{n} a_k$, gdzie $n := 2^m$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ i porównaj go pod względem jakości numerycznej z tradycyjną metodą sumowania. Przeprowadź eksperymenty wykonując obliczenia z pojedynczą i podwójną precyzją dla odpowiednio dobranych elementów $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Czy inne uporządkowanie elementów a_k coś zmienia? Co możemy zaobserwować dla dużych wartości n? Jak to wytłumaczyć?

P1.2. 8 punktów Niech $x := 1 + \pi/10^6$. Oblicz x^n dla $n = k \times 10^5$, $k = 1, 2, \ldots, 10$, stosując arytmetyki z pojedynczą i podwójną precyzją; oblicz błąd względny ρ_n wyniku obliczonego w arytmetyce z pojedynczą precyzją w odniesieniu do wyniku obliczonego w arytmetyce z podwójną precyzją. (Jaka powinna być, w przybliżeniu, wartość x^n dla $n = 10^6$?) Dla podanych wyżej wartości n wydrukuj: n, x^n, ρ_n, $\rho_n/(n \times \varepsilon)$, gdzie ε jest błędem reprezentacji maszynowej.

P1.3. 10 punktów Napisz podprogram obliczający wartość logarytmu naturalnego wg następującej metody. Jeśli $x = 1$, to sprawa jest oczywista. W przeciwnym wypadku należy wyznaczyć takie $n \in \boldsymbol{Z}$ i $r \in [\frac{1}{2}, 1)$, że $x = r \times 2^n$. Następnie połóż $u := (r - \sqrt{2}/2)/(r + \sqrt{2}/2)$ i oblicz przybliżoną wartość $\ln \dfrac{1+u}{1-u}$ ze wzoru

$$\ln \frac{1+u}{1-u} \approx u \cdot \frac{20790 - 21545.27u^2 + 4223.9187u^4}{10395 - 14237.635u^2 + 4778.8377u^4 - 230.41913u^6}.$$

Wreszcie, przyjmij, że $\ln x \approx \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln 2 + \ln \dfrac{1+u}{1-u}$. Porównaj wartości obliczone w ten sposób z podawanymi przez podprogram biblioteczny (funkcję standardową) dla np. 100 wartości argumentu. Jaki jest największy błąd względny? Skomentuj wyniki.

P1.4. 10 punktów *Stałą Eulera* $\gamma = 0.577215664901532286\ldots$ definiujemy jako granicę $\gamma := \lim_{n\to\infty} \gamma_n$, gdzie $\gamma_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$. Zakładając, że dla dostatecznie dużych wartości n jest $\gamma_n - \gamma \approx cn^{-d}$, gdzie c i $d > 0$ są pewnymi stałymi, spróbuj przy pomocy komputera wyznaczyć doświadczalnie wartości tych stałych.

P1.5. $\boxed{\text{8 punktów}}$ Obliczaj wyrazy ciągów

$$\textbf{(a)}\quad s_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k!^{-2}, \qquad \textbf{(b)}\quad t_n := \sum_{k=0}^{n} k!^{-2}$$

do chwili, gdy dwa kolejne wyrazy są równe w wybranej arytmetyce maszynowej. (Wybierz odpowiedni sposób generowania składników sum!)

P1.6. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Funkcja cosinus ma następujące rozwinięcie w szereg potęgowy, zbieżne dla każdej wartości x:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Przybliżoną wartość $\cos x$ można otrzymać jako wartość wielomianu

$$c_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

(a) Wykonaj obliczenia w arytmetyce z pojedynczą precyzją dla $n = 0, 1, 2, \ldots, 12$ oraz dla wybranych wartości x z przedziału $[0, 10]$.
(b) Sporządź wykresy wielomianów $c_2, c_4, \ldots, c_{24}$ w tym przedziale.
(c) Skomentuj wyniki.

P1.7. $\boxed{\text{8 punktów}}$ Wiadomo, że $\pi = 4 \lim_{n\to\infty} s_n$, gdzie $s_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (2k+1)^{-1}$. Oblicz w arytmetyce z podwyższoną precyzją wartości s_n dla $n = 10^7$, sumując składniki w porządku **(a)** naturalnym i **(b)** odwrotnym. Oblicz błędy $|4.0 \times fl(s_n) - \pi|$.

P1.8. $\boxed{\text{8 punktów}}$ Wartości funkcji $f(x) = (x-1)^8$ można obliczać na różne sposoby, np:

(a) $x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1$,

(b) $(((((((x - 8)x + 28)x - 56)x + 70)x - 56)x + 28)x - 8)x + 1$,

(c) $(x-1)(x-1)(x-1)(x-1)(x-1)(x-1)(x-1)(x-1)$,

(d) $\left\{\left[(x-1)^2\right]^2\right\}^2$,

(e) $\begin{cases} e^{8\ln|x-1|} & : \ (x \neq 1), \\ 0 & : \ (x = 1). \end{cases}$

Porównaj podane wyżej metody obliczania $f(x)$ dla $x \in [0.99, 1.01]$ (np. w N równoodległych punktach tego przedziału). Wyniki eksperymentu przedstaw na odpowiednich wykresach, przeanalizuj je i skomentuj.

P1.9. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Wykorzystując jedynie podstawowe działania arytmetyczne $(+, -, *, /)$, zaproponuj efektywny sposób wyznaczania wartości funkcji $f(x) = \arctan x$ z dokładnością bliską dokładności maszynowej. Opracowany algorytm porównaj z funkcją biblioteczną.

P1.10. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Wykorzystując jedynie podstawowe działania arytmetyczne $(+, -, *, /)$, zaproponuj efektywny sposób wyznaczania wartości funkcji sinus i cosinus z dokładnością bliską dokładności maszynowej. Opracowany algorytm porównaj z funkcjami bibliotecznymi.

P1.11. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Niech $\{s_n\}$ będzie ciągiem zbieżnym do granicy s. *Ciąg Δ^2 Aitkena*

$$t_n = \frac{s_n s_{n+2} - s_{n+1}^2}{s_{n+2} - 2s_{n+1} + s_n} \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

jest w wielu wypadkach zbieżny do s szybciej niż $\{s_n\}$, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n - s}{s_n - s} = 0.$$

(a) Oblicz 20 początkowych wyrazów ciągów $\{s_n\}$ i $\{t_n\}$ oraz $\{e_n := s_n - s\}$ i $\{d_n := t_n - s\}$ w wypadku

i. $s_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j (2j+1)^{-1}$, $s = \pi/4 \approx 0.7853981634$;

ii. $s_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-3/2}$, $s \approx 2.612375348685488$.

Czy mamy do czynienia z istotnym przyspieszeniem zbieżności? Powtórz doświadczenie dla innych danych.

(b) Zauważ, że zbieżność ciągu $\{t_n\}$ można przyspieszyć w analogiczny sposób, definiując ciąg $\{u_n\}$ wzorem

$$u_n = \frac{t_n t_{n+2} - t_{n+1}^2}{t_{n+2} - 2t_{n+1} + t_n} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Korzystając z tej obserwacji wykonaj kilka doświadczeń obliczeniowych, m. in. dla danych z punktu 1.11a.

(c) Uogólniając metodę, zaproponuj sposób ***przyspieszenia ciągu*** $\{u_n\}$. Sprawdź eksperymentalnie jego skuteczność.

P1.12. $\boxed{\text{12 punktów}}$ Rozważ szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{3/2} + k^{1/2}\right)^{-1}$. Spróbuj wyznaczyć trzy dokładne cyfry dziesiętne sumy szeregu. Skomentuj wyniki.

P1.13. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Ciąg *funkcji Bessla* J_n określamy wzorem

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin t - nt)\, dt \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Łatwo zauważyć, że $|J_n(x)| \le 1$. Wiadomo, że zachodzi związek

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

(a) i. Wykorzystać ten związek oraz znane wartości $J_0(1) \approx 0.765197865$, $J_1(1) \approx 0.4400505857$ do obliczenia w arytmetyce z pojedynczą precyzją wartości

$$J_0(1),\ J_1(1),\ \ldots,\ J_{20}(1).$$

Co można powiedzieć o wiarygodności wyników?

ii. Rozważyć następujący algorytm.

- Wybrać $N > 20$ i określić pomocnicze wartości

$$c_{N+1}^{(N)} := 0; \qquad c_N^{(N)} := 1.0,$$
$$c_{k-1}^{(N)} := \frac{2k}{x} c_k^{(N)} - c_{k+1}^{(N)} \quad (k = N, N-1, \ldots, 1).$$

- Następnie obliczyć stałą $\lambda := J_0(x)/c_0^{(N)}$ oraz wielkości

$$j_k^{(N)} := \lambda c_k^{(N)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, N).$$

- Wówczas jest $j_k^{(N)} \approx J_k(x)$ dla $k = 0, 1, \ldots, N$.

Wykonać obliczenia w arytmetyce z pojedynczą precyzją dla $x = 1$ oraz dla $N = 25$ i $N = 30$. Przedyskutować wyniki.

(b) Powtórzyć obliczenia z punktu 1.13a w arytmetykach z podwyższoną precyzją. Przedyskutować wyniki.

P1.14. 12 punktów Wiadomo, że suma szeregu

$$S_2 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2+1} \tag{1}$$

wynosi 0.36398547250893341852488170816398... Spróbuj wyznaczyć wartość tej liczby z dokładnością 10 i 16 cyfr za pomocą sum częściowych szeregu (1). Następnie zauważ, że

$$\frac{\pi^2}{12} - S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2(k^2+1)}, \qquad S_2 - \frac{\pi^2}{12} + \frac{7\pi^4}{720} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^4(k^2+1)}$$

i wykorzystaj te związki, aby przyspieszyć obliczenia. Postępując podobnie, zaproponuj efektywny sposób wyznaczania wartości szeregu

$$S_n := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^n+1} \qquad (n = 2, 4, 6, \ldots).$$

P1.15. 10 punktów Dla danych $x > 0$ i $\varepsilon > 0$ przybliżoną wartość e^x można otrzymać jako

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!},$$

gdzie n jest najmniejszą liczbą naturalną, dla której zachodzi nierówność $|x^{n+1}/(n+1)!| < \varepsilon$. (Jeśli $x < 0$, można zastosować wzór $e^x = 1/e^{-x}$.)

Obliczenie e^x można sprowadzić do obliczenia e^u dla $|u| < \frac{1}{2}\ln 2$, co oznacza sumowanie <u>bardzo szybko</u> zbieżnego szeregu. Mianowicie, dla danego x wyznaczamy takie stałe m oraz u, że

$$e^x = 2^m e^u.$$

Algorytm jest następujący: $z := x/\ln 2$; $m := \lfloor z + \sigma\frac{1}{2} \rfloor$; $w := z - m$; $u := w \ln 2$, gdzie $\sigma := \operatorname{sgn} x$.

Wykonać obliczenia sprawdzające powyższy algorytm dla kilku serii wartości x (małych, średnich i dużych), podając w każdym wypadku wartości n, błędu bezwzględnego i względnego.

P1.16. 8 punktów Opracować i sprawdzić na przykładach procedury funkcyjne, obliczające z dokładnością bliską dokładności maszynowej wartości następujących funkcji matematycznych:

$$f_1(x) := x^{-2}(1 - \cos x), \quad f_2(x) := 1 - \cos x, \quad f_3(x) := x - \sin x \quad (-\pi \le x \le \pi).$$

W każdym wypadku zbadać, czy istnieje groźba utraty cyfr znaczących wyniku i – w razie potrzeby – zaproponować sposób uniknięcia groźby.

P1.17. 10 punktów Napisz podprogram obliczający dwa pierwiastki x_1 i x_2 trójmianu kwadratowego $f(x) = ax^2 + bx + c$ o rzeczywistych współczynnikach a, b i c, jak również wartości $f(x_1)$ i $f(x_2)$. Użyj wzorów redukujących błędy zaokrągleń. Sprawdź działanie podprogramu m. in. dla

$$\begin{aligned}(a,\, b,\, c) \;=\; & (0,1,0),\ (0,0,1),\ (0,0,0),\ (1,1,0),\ (2,10,1),\ (1,-4,3.99999),\\ & (1,-8.01,16.004),\ (2\times 10^{17}, 10^{18}, 10^{17}),\ (10^{-17}, -10^{17}, 10^{17}).\end{aligned}$$

P1.18. 12 punktów Zaproponuj efektywny numerycznie program wyznaczający rozwiązania równania algebraicznego postaci

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

gdzie a, b, c i d są liczbami rzeczywistymi.

P1.19. $\boxed{\text{8 punktów}}$ Opracować i sprawdzić na przykładach procedury funkcyjne, obliczające z dokładnością bliską dokładności maszynowej wartości następujących funkcji matematycznych:

$$g_1(x) := x + e^x - e^{3x}, \quad g_2(x) := \log x - 1, \quad g_3(x) := \sqrt{x^2+1} - 1.$$

W każdym wypadku zbadać, czy istnieje groźba utraty cyfr znaczących wyniku i – w razie potrzeby – zaproponować sposób uniknięcia groźby.

P1.20. $\boxed{\text{10 punktów}}$

(a) Sprawdzić, że *ciąg Fibonacciego*

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right] \tag{2}$$

spełnia związek rekurencyjny

$$z_k = z_{k-1} + z_{k-2} \qquad (k = 2, 3, \ldots). \tag{3}$$

Sprawdzić, że $F_0 = 1$ i $F_1 = 1$ są początkowymi dwoma wyrazami ciągu.

(b) Sprawdzić, że ciąg

$$G_k = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k. \tag{4}$$

również spełnia związek rekurencyjny (3) dla pewnych (*jakich?*) danych G_0 i G_1 .

(c) Obliczyć – w arytmetykach z pojedynczą i podwyższoną precyzją – 50 początkowych wyrazów ciągów $\{F_k\}$ i $\{G_k\}$ następującymi dwoma sposobami, a następnie porównać wyniki otrzymane za pomocą:

i. związku rekurencyjnego (3),
ii. wzorów (2), (4).

Objaśnić wyniki.

P1.21. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Wykazać, że ciąg

$$I_n := \int_0^1 \frac{x^n}{x+10}\,dx \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{5}$$

ma następujące własności:

(a) $I_0 = \ln \frac{11}{10}$;

(b) $I_n + 10I_{n-1} = \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$;

(c) $\frac{1}{11(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{10(n+1)}$.

Korzystając ze związku rekurencyjnego (b) obliczyć – z pojedynczą, a następnie z podwójną precyzją – kolejno $I_0, I_1, \ldots, I_{20}$. Następnie powtórzyć obliczenia, przyjmując $I_{21} := 0$ (*dlaczego jest to sensowne przybliżenie?*) i – korzystając z (b) – otrzymać $I_{20}, I_{19}, \ldots, I_0$. Porównać wyniki i wyciągnąć wnioski.

P1.22. $\boxed{\text{Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów}}$ Wykorzystując tylko podstawowe działania arytmetyczne $(+, -, *, /)$, zaproponuj efektywny sposób wyznaczania wartości funkcji sinus w **dziedzinie liczb zespolonych** z dokładnością bliską dokładności maszynowej.

P1.23. $\boxed{\text{Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów}}$ Niech X i Y będą macierzami kwadratowymi stopnia n, gdzie n jest liczbą parzystą. Iloczyn macierzy

$$Z = X\,Y$$

definiujemy następująco:

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}\, y_{kj} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\; j = 1, 2, \ldots, n), \tag{6}$$

gdzie z_{ij} jest elementem i-tego wiersza i j-tej kolumny macierzy Z (wielkości x_{ij} i y_{ij} mają znaczenie analogiczne). Aby wyznaczyć iloczyn macierzy korzystając ze wzoru (6) należy wykonać n^3 mnożeń. Macierze Z, X i Y możemy zapisać w tzw. *postaci blokowej*:

$$Z = \begin{bmatrix} R & S \\ T & U \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} E & G \\ F & H \end{bmatrix}.$$

Jeśli $Z = XY$, to

$$R = AE + BF, \quad S = AG + BH, \quad T = CE + DF, \quad U = CG + DH.$$

W tym wypadku musimy obliczyć 8 iloczynów macierzy stopnia $n/2$, czyli ponownie wykonać $8(n/2)^3 = n^3$ mnożeń. Sprawdź jednak, że prawdziwe są równości:

$$R = P_5 + P_4 - P_2 + P_6, \quad S = P_1 + P_2, \quad T = P_3 + P_4, \quad U = P_5 + P_1 - P_3 - P_7,$$

gdzie

$$P_1 = A(G - H), \quad P_2 = (A + B)H, \quad P_3 = (C + D)E, \quad P_4 = D(F - E),$$
$$P_5 = (A + D)(E + H), \quad P_6 = (B - D)(F + H), \quad P_7 = (A - C)(E + G).$$

Stosując powyższą procedurę obliczamy tylko 7 iloczynów macierzy stopnia $n/2$. Wykonujemy zatem $7/8 \cdot n^3$ mnożeń. Jeśli $n = 2^k$, to iloczyny macierzy stopnia $n/2$ obliczamy podobnie (jeśli n nie jest potęgą dwójki możemy rozszerzyć macierze uzupełniając je zerami do odpowiedniego rozmiaru). Powyższe postępowanie nosi nazwę *algorytmu Strassena mnożenia macierzy*.

1. Porównaj pod względem szybkości i dokładności tradycyjny algorytm mnożenia macierzy (wzór (6)) z algorytmem Strassena. **2.** Obliczenia przeprowadź dla macierzy o rozmiarach od 4 do 500. Dla macierzy X o znanej macierzy odwrotnej X^{-1} (konsultacje) oblicz wartości błędów

$$\Delta(XX^{-1} - I), \qquad \Delta(X^{-1}X - I),$$

gdzie I jest macierzą jednostkową, natomiast $\Delta(X) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2$. **3.** Dla danych macierzy X, Y i V oblicz $\Delta((XY)V - X(YV))$. **4.** Skomentuj wyniki.