

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M7

18 listopada 2010 r.

M7.1. 1 punkt Zmodyfikowany wzór interpolacyjny Lagrange'a

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \sigma_k f(x_k) \prod_{j=0, j \neq k}^n (x - x_j)$$

zawiera wielkości

$$(1) \quad \sigma_k^{(n)} \equiv \sigma_k := \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{1}{x_k - x_j} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Wykazać, że

$$\sigma_k^{(n)} := \frac{\sigma_k^{(n-1)}}{x_k - x_n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$\sigma_n^{(n)} := - \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j^{(n)}.$$

Jaka ważna własność powyższego wzoru interpolacyjnego stąd wynika?

M7.2. 1 punkt Wykazać, że wzór (1) znacznie się upraszcza, jeśli węzły interpolacji są wybrane w jeden z następujących sposobów:

a) $x_k = x_0 + k h$ ($k = 0, 1, \dots, n$; h – stała);

b) $x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+2}$ ($k = 0, 1, \dots, n$).

M7.3. 1 punkt Wykazać, że wielomian $L_n \in \Pi_n$ interpolujący daną funkcję f w parami różnych węzłach $x_0, x_1, \dots, x_n$ można wyrazić za pomocą wzoru

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n f[x_0, \dots, x_k] p_k(x),$$

gdzie $p_k(x) := \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$.

M7.4. 1 punkt Udowodnić, że jeśli $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, to

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^n g[x_0, x_1, \dots, x_k] h[x_k, x_{k+1}, \dots, x_n].$$

- M7.5.** 2 punkty Wykazać, że dla $w_n(x) = x^n$ zachodzi wzór $w_n[1, 2, \dots, n] = \frac{1}{2}n(n+1)$.
- M7.6.** 1 punkt Wykazać, że w przedziale $[-1, 1]$ wielomiany Czebyszewa wyrażają się wzorem $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ($n \geq 0$).
- M7.7.** 1 punkt Wykazać, że wielomian Czebyszewa T_n ($n \geq 1$) ma n zer rzeczywistych, pojedynczych, leżących w przedziale $(-1, 1)$.
- M7.8.** 1 punkt Wyznaczyć wszystkie *punkty ekstremalne* n -tego wielomianu Czebyszewa, tj. rozwiązania równania $|T_n(x)| = 1$.
- M7.9.** 1 punkt Uzasadnić następujący *algorytm Clenshawa* obliczania wartości wielomianu $w(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \dots + c_nT_n(x)$ w punkcie x ($c_0, c_1, \dots, c_n$ są danymi stałymi). Określamy pomocniczo wielkości $B_0, B_1, \dots, B_{n+2}$ wzorami
- $$\begin{aligned} B_{n+2} &:= B_{n+1} := 0; \\ B_k &:= 2xB_{k+1} - B_{k+2} + c_k \quad (k = n, n-1, \dots, 0). \end{aligned}$$
- Wówczas $w(x) = \frac{1}{2}(B_0 - B_2)$.

Stanisław Lewanowicz