

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M6

11 listopada 2010 r.

M 6.1. 1 punkt Niech $\mathcal{L}$ będzie odwzorowaniem, przyporządkowującym funkcji f wielomian $L_n \equiv L_n^f$ stopnia $\leq n$, interpolujący tę funkcję w parami różnych $n + 1$ węzłach $x_0, \dots, x_n$:

$$\mathcal{L}f = L_n^f.$$

- (a) Sprawdzić, że $\mathcal{L}$ jest odwzorowaniem liniowym.
- (b) Sprawdzić, że dla każdego wielomianu $w \in \Pi_n$ jest $\mathcal{L}w = w$.

M 6.2. 1 punkt Wykazać, że wielomiany

$$(1) \quad \lambda_k(x) := \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

spełniają tożsamość $\sum_{k=0}^n \lambda_k(x) \equiv 1$.

M 6.3. 1 punkt Wykazać, że wielomiany (1) spełniają równości

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k(0) x_k^j = \begin{cases} 1 & (j = 0), \\ 0 & (j = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

M 6.4. 1 punkt Sprawdzić, że wielomian L_n^f można podać wzorem

$$L_n^f(x) = p_{n+1}(x) \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{(x - x_k) p'_{n+1}(x_k)},$$

gdzie $p_{n+1}(x) := (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

M 6.5. 1 punkt Wykazać, że w wypadku równoodległych węzłów

$$x_k = x_0 + kh \quad (k = 0, 1, \dots, n; h > 0)$$

wielomian interpolacyjny Lagrange'a można zapisać w postaci

$$L_n^f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n f(x_k) (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \prod_{j=0, j \neq k}^n \left(\frac{x - x_0}{h} - j \right).$$

M 6.6. 2 punkty Uzasadnić następującą *postać barycentryczną* wielomianu L_n^f :

$$L_n^f(t) = \begin{cases} \frac{\sum_{i=0}^n \frac{\sigma_i}{t - x_i} f(x_i)}{\sum_{i=0}^n \frac{\sigma_i}{t - x_i}} & (t \notin \{x_0, x_1, \dots, x_n\}), \\ f(x_k) & (t = x_k, 0 \leq k \leq n), \end{cases}$$

gdzie

$$\sigma_i := 1 / \prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

M 6.7. 1 punkt Uzasadnić następujący algorytm, zwany *uogólnionym schematem Hornera*, obliczania wartości wielomianu $w \in \Pi_n$, podanego w postaci

$$(2) \quad w(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) :$$

Obliczamy wielkości pomocnicze $u_0, u_1, \dots, u_n$ za pomocą wzorów

$$u_n := b_n;$$

$$u_k := u_{k+1}(x - x_k) + b_k \quad (k = n-1, n-2, \dots, 0).$$

Wówczas $w(x) = u_0$.

M 6.8. 2 punkty Sformułować metodę wyznaczenia współczynników $a_0, a_1, \dots, a_n$ *postaci potęgowej*

$$L_n^f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

wielomianu interpolacyjnego L_n^f , przy założeniu, że znane są współczynniki $b_0, \dots, b_n$ jego postaci Newtona (2).

Stanisław Lewanowicz