

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 5

4 listopada 2010 r.

M 5.1. 1 punkt Załóżmy, że nieosobliwa macierz $A = [a_{ij}^{(1)}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest symetryczna, tj.

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ji}^{(1)} \quad \text{dla } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Założmy ponadto, że do rozwiązania układu równań liniowych $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ można zastosować metodę eliminacji bez wyboru elementów głównych.

a) Wykazać, że wówczas wielkości $a_{ij}^{(k)}$, otrzymywane w tej metodzie kolejno dla $k = 2, 3, \dots, n$, są takie, że

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)} \quad \text{dla } i, j = k, k+1, \dots, n.$$

b) Wskazać, jak można wykorzystać ten fakt dla zmniejszenia kosztu metody eliminacji.

M 5.2. 1 punkt Niech $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ będzie macierzą trójkątniową

$$T = \begin{bmatrix} d_1 & e_1 & & & \\ c_2 & d_2 & e_2 & & \\ & c_3 & d_3 & e_3 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & c_{n-1} & d_{n-1} & e_{n-1} \\ & & & & c_n & d_n \end{bmatrix},$$

gdzie $|d_i| > |c_i| + |e_i|$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ (przyjmujemy, że $c_1 = e_n = 0$). Jak uprości się w tym wypadku metoda eliminacji dla układu równań $T\mathbf{x} = \mathbf{b}$?

M 5.3. 1 punkt Macierz

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & c_2 & & & b_1 \\ b_2 & a_2 & c_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_n \\ c_1 & & & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

różni się od trójkątniowej tylko obecnością narożnych elementów b_1 i c_1 . Jak wykorzystać to pokrewieństwo do wyznaczenia rozkładu trójkątnego macierzy B ?

M 5.4. 1 punkt Niech $\tilde{\mathbf{x}}$ oznacza rozwiązanie układu równań liniowych $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ o danej macierzy nieosobliwej A , otrzymane metodą eliminacji, w arytmetyce zmiennopozycyjnej. Dokładność rozwiązania $\tilde{\mathbf{x}}$ można poprawić w następujący sposób.

Krok 1. Oblicz wektor $\mathbf{r} := \mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}$.

Krok 2. Oblicz rozwiązanie $\mathbf{h}$ układu $A\mathbf{h} = \mathbf{r}$.

Krok 3. Oblicz poprawione rozwiązanie układu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ według wzoru $\mathbf{x}' := \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{h}$.

a) Dlaczego w kroku 1 warto obliczyć wektor $\mathbf{r}$ z podwójną precyzją?

b) Jak obliczyć możliwie małym kosztem wektor $\mathbf{h}$, który pojawia się w kroku 2?

M 5.5. 1 punkt

Wykazać, że jeśli dowolna norma macierzy B jest mniejsza od 1, to ciąg $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ określony wzorem

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c} \quad (k = 0, 1, \dots)$$

jest zbieżny do pewnego wektora $\mathbf{x}^*$, niezależnie od wyboru $\mathbf{x}^{(0)}$, przy czym – przy naturalnym założeniu (jakim?) – zachodzi nierówność

$$\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \|B\|^k \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(0)}\| \quad (k \geq 1).$$

M 5.6. 1 punkt Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ będzie macierzą ze ściśle dominującą przekątną, tj. taką, że

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Wykazać, że metoda Jacobiego, zastosowana do układu równań o macierzy A , jest zbieżna.

M 5.7. 1 punkt Wykazać, że przy założeniach podanych w zadaniu 5.6 również metoda Seidela jest zbieżna.**M 5.8.** 1 punkt

Niech macierz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ spełnia warunki

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

(Mówimy, że A jest macierzą z przekątną dominującą kolumnowo.)

Pokazać, że metoda iteracyjna Jacobiego, zastosowana do układu równań o macierzy A , jest zbieżna.

M 5.9. 2 punkty Wyodrębniając w macierzy A dolny trójkąt L , przekątną D i górny trójkąt U , otrzymamy następujący rozkład tej macierzy: $A = L + D + U$. Niech macierz B_ω , związana z metodą nadrelaksacji, będzie określona wzorem

$$B_\omega := (D + \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D - \omega U],$$

gdzie ω jest parametrem. Wykazać, że promień spektralny macierzy B_ω spełnia nierówność

$$\rho(B_\omega) \geq |\omega - 1|.$$

Stanisław Lewanowicz