Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 4

28 października 2010 r.

M 4.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że iloczyn dwu macierzy trójkątnych dolnych (górnych) tego samego stopnia jest macierzą trójkątną dolną (górną).

M 4.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że jeśli L jest macierzą trójkątną dolną z jedynkami na przekątnej głównej, to L^{-1} również jest macierzą tego typu.

M 4.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Zaproponować algorytm odwracania macierzy trójkątnej.

M 4.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyznaczyć liczbę operacji arytmetycznych potrzebnych do uzyskania rozkładu macierzy kwadratowej n-tego stopnia na iloczyn macierzy trójkątnych.

M 4.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Dla danej macierzy symetrycznej dodatnio określonej $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ istnieje jedyna macierz trójkątna dolna $L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o dodatnich elementach na głównej przekątnej i taka, że $LL^T = A$. Wykazać, że elementy macierzy L można obliczać za pomocą wzorów

$$l_{ii} := \left(a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}^2\right)^{1/2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$l_{ij} := \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}\right) \Big/ l_{jj} \quad (j = 1, 2, \ldots, n;\ i = j+1, j+2, \ldots, n).$$

M 4.6. [1] $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech dla $r = 1, 2, \ldots, n-1$ macierze $M^{(r)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ będą określone wzorami (*zaznaczono tylko elementy niezerowe*)

$$M^{(r)} := \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & m_{r+1,r} & 1 & & & \\ & & m_{r+2,r} & & 1 & & \\ & & \vdots & & & \ddots & \\ & & m_{nr} & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Czy dla danej macierzy A można tak dobrać liczby m_{ij}, żeby
a) elementy podprzekątniowe pierwszej kolumny macierzy $M^{(1)}A$ były równe zeru;
b) elementy podprzekątniowe pierwszej i drugiej kolumny macierzy $M^{(2)}M^{(1)}A$ były równe zeru?

[1] Wersja popr. 2.11.

M 4.7. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Załóżmy, że do układu $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ o macierzy $A = A^{(1)} = [a_{ij}^{(1)}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ można zastosować zwykłą metodę eliminacji. Układ ten jest kolejno przekształcany do postaci

$$A^{(k)}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{(k)} \qquad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

gdzie $A^{(k)} = [a_{ij}^{(k)}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Sprawdzić, że zależnie od tego, czy element a_{ij} leży na, nad, czy pod przekątną główną, mamy

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(n)} &= a_{ij}^{(n-1)} = \ldots = a_{ij}^{(i)} \qquad (i \leqslant j); \\ a_{ij}^{(n)} &= a_{ij}^{(n-1)} = \ldots = a_{ij}^{(j+1)} = 0 \qquad (i > j). \end{aligned}$$

Wywnioskować stąd, że przekształcenia elementów macierzy są wykonywane dla $i, j = 1, 2, \ldots, n$ według wzorów

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} + m_{ik}a_{kj}^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p; \quad p := \min(i-1, j)),$$

gdzie $m_{ik} := -a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}$, a następnie uzasadnić wzór

$$a_{ij} = a_{ij}^{(p+1)} - \sum_{k=1}^{p} m_{ik}a_{kj}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik}u_{kj},$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenia $l_{ik} := -m_{ik}$ dla $i > k$ oraz $l_{ii} := 1$, natomiast $u_{kj} := a_{kj}^{(k)}$. Zinterpretować uzyskany wynik.

M 4.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyznaczyć liczbę operacji arytmetycznych potrzebnych do rozwiązania metodą eliminacji układu n równań liniowych z n niewiadomymi.

M 4.9. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Zaproponować użycie metody eliminacji do wyznaczenia macierzy odwrotnej do macierzy A stopnia n. Podać liczbę wykonywanych operacji.

Stanisław Lewanowicz